Física III - 4320301

Escola Politécnica - 2013

GABARITO DA PR

25 de julho de 2013

Questão 1

Uma distribuição de cargas, esfericamente simétrica, tem densidade volumétrica

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 \dfrac{r}{R} & r \leq R \\ 0 & r > R \end{cases} .$$

onde ρ_0 é uma constante positiva.

(a) (1,0 ponto) Calcule a carga $Q(r)$ contida em uma esfera de raio r concêntrica com a distribuição de carga. Calcule a carga total da distribuição.

(b) (1,0 ponto) Calcule o vetor campo elétrico para $r < R$.

(c) (0,5 ponto) Calcule o vetor campo elétrico para $r > R$.

Solução da questão 1

(a) A carga contida na esfera S de raio $r \leq R$ concêntrica com a distribuição de carga é

$$Q(r) = \int_S \rho(r) dV = \int_0^r \rho_0 \frac{r}{R} 4\pi r^2 dr \Longrightarrow \boxed{Q(r) = \frac{\rho_0 \pi r^4}{R}}.$$

A carga total é obtida fazendo $r = R$,

$$\boxed{Q(R) = \rho_0 \pi R^3}.$$

(b) A lei de Gauss num volume $\mathcal{V}$ delimitado por uma superfície esférica S de raio r concêntrica com a distribuição de carga fornece

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \rho dV.$$

Para $r < R$, usando a simetria esférica do campo $\vec{E}$, obtemos

$$E 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} Q(r) \Longrightarrow E = \frac{\rho_0 r^2}{4\epsilon_0 R} \Longrightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\rho_0 r^2}{4\epsilon_0 R} \hat{r}}.$$

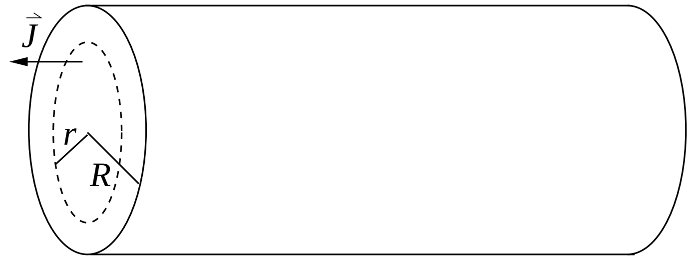
(c) Para $r > R$, novamente tomamos uma superfície esférica S de raio r concêntrica com a distribuição de carga obtemos

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = E 4\pi r^2 = \frac{Q(R)}{\epsilon_0} \Longrightarrow E = \frac{\rho_0 R^3}{4\epsilon_0 r^2} \Longrightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\rho_0 R^3}{4\epsilon_0 r^2} \hat{r}}.$$

Questão 2

Em um condutor cilíndrico muito longo, maciço, de raio R passa uma corrente cuja densidade J varia quadraticamente com a distância ao eixo do cilindro: $J = \alpha\, r^2$, onde α é uma constante.

(a) (1,0 ponto) Calcule a corrente $I(r)$ através do disco de raio r mostrado na figura.



(b) (0,5 ponto) Calcule o vetor $\vec{B}$ para $r < R$.

(c) (0,5 ponto) Calcule o vetor $\vec{B}$ para $r > R$.

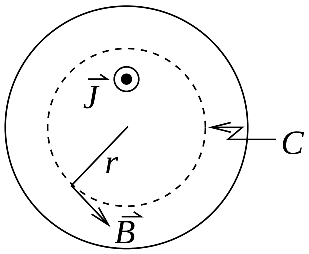
(d) (0,5 ponto) Expresse α em função da corrente total I e R.

Solução da questão 2

(a) A corrente $I(r)$ é dada por

$$I(r) = \int \vec{J} \cdot d\vec{A} = \int_0^r (\alpha r^2)(2\pi r dr) = \frac{\pi r^4 \alpha}{2}$$

(b) O campo tem simetria cilíndrica. Usando a lei de Ampère com o percurso pontilhado C da figura obtemos para $r < R$:



$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B(r) 2\pi r = \mu_0 I(r)\,,$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 r^3 \alpha}{4} \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 r^3 \alpha}{4} \widehat{\theta}}$$

(c) Se $r > R$, a corrente que atravessa uma superfície limitada por C é I.

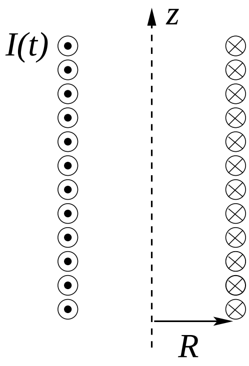
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B(r) 2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 R^4 \alpha}{4r} \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 R^4 \alpha}{4r} \widehat{\theta}}$$

(d) Substituindo r por R na expressão do item (a) obtemos

$$I(R) = I = \frac{\pi R^4 \alpha}{2} \Longrightarrow \boxed{\alpha = \frac{2I}{\pi R^4}}$$

Questão 3

Considere um solenóide infinito de raio R com n espiras por unidade de comprimento



por onde passa uma corrente

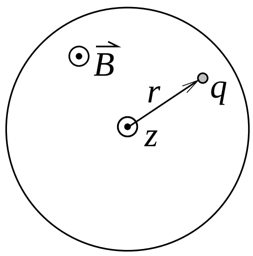
$$I(t) = \begin{cases} I_0 & \text{para} \quad t < 0, \\ I_0(1+\alpha t) & \text{para} \quad t \geq 0, \end{cases}$$

onde α é uma constante com dimensão de inverso de tempo. Dado: o vetor campo magnético no solenóide $\vec{B}(t) = \mu_0 n I(t) \widehat{k}$.

(a) (1,0 ponto) Calcule o vetor campo elétrico no exterior do solenóide para $t \geq 0$.

(b) (1,0 ponto) Calcule o vetor campo elétrico no interior do solenóide para $t \geq 0$.

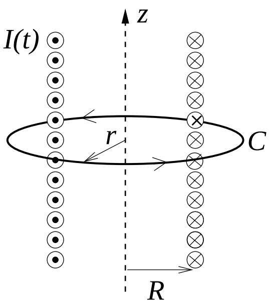
(c) (0,5 ponto) Considere uma partícula com carga q e massa m que no instante $t = 0$ está parada a uma distância r do eixo do solenóide conforme a figura. Calcule o vetor aceleração desta partícula em $t = 0$.



Corte Transversal

Solução da questão 3

(a) O campo elétrico pode ser calculado através da lei de Faraday. Por simetria o campo elétrico é da forma $\vec{E} = E(r)\widehat{\theta}$, onde r é a distância até o eixo do solenóide.



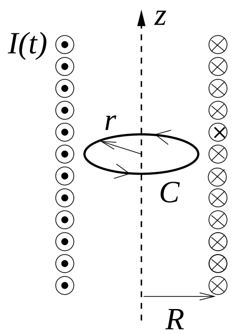
Percorrendo o caminho C de raio $r > R$ no sentido indicado na figura a normal ao disco S de raio r é igual a $\widehat{k}$.

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \Rightarrow E2\pi r = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}(t)\cdot d\vec{A} = -\frac{dB(t)}{dt}\,\pi R^2$$

$$\Rightarrow E2\pi r = -\mu_0 n\left(\frac{dI(t)}{dt}\right)\pi R^2$$

$$\Rightarrow E = -\frac{\mu_0 n\alpha I_0 R^2}{2\,r} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = -\frac{\mu_0 n\alpha I_0 R^2}{2\,r}\widehat{\theta}}.$$

(b) Novamente usamos a lei de Faraday.



Tomando um caminho C circular, análogo ao do item (a), mas com raio $r < R$, obtemos

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \Rightarrow E2\pi r = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}(t)\cdot d\vec{A} = -\frac{dB(t)}{dt}\,\pi r^2$$

$$\Rightarrow E2\pi r = -\mu_0 n\left(\frac{dI(t)}{dt}\right)\pi r^2$$

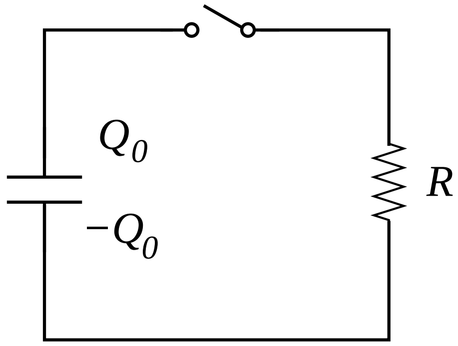
$$\Rightarrow E = -\frac{\mu_0 n\alpha I_0 r}{2} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = -\frac{\mu_0 n\alpha I_0 r}{2}\widehat{\theta}}.$$

(c) Como a partícula está em repouso, a única força sobre a partícula é a força elétrica. A aceleração é obtida usando-se a segunda lei de Newton:

$$m\vec{a} = q\vec{E} \Longrightarrow \boxed{\vec{a} = -\frac{q\mu_0 n\alpha I_0 r}{2m}\widehat{\theta}}.$$

Questão 4

Um capacitor de capacitância C está ligado em paralelo a um resistor de resistência R, conforme a figura. No instante $t = 0$ a carga do capacitor é Q_0 e a chave é fechada.



(a) (0,5 ponto) Escreva a equação diferencial para a carga $Q(t)$ na placa superior do capacitor para $t > 0$.

(b) (1,0 ponto) Calcule $Q(t)$ e $I(t)$ para $t > 0$.

(c) (1,0 ponto) Calcule a energia $U(t)$ armazenada no capacitor. Note que $U(t)$ não é constante. Calcule dU/dt e interprete o resultado.

$\boxed{\textbf{Solução da questão 4}}$

(a) A ddp no capacitor é igual à ddp no resistor

$$RI = \frac{Q}{C}.$$

Como o capacitor está descarregando $I = -dQ/dt$ e a equação do circuito é

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0.$$

(b) A solução da equação é

$$Q(t) = Ae^{-t/RC}, \qquad Q(0) = Q_0 = A,$$

$$\Longrightarrow Q(t) = Q_0 e^{-t/RC}; \qquad I(t) = -\frac{dQ}{dt} = \frac{Q_0}{RC}e^{-t/RC}.$$

(c) A energia no capacitor é

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q_0^2}{2C}e^{-2t/RC} \Longrightarrow \frac{dU}{dt} = -\frac{Q_0^2}{RC^2}e^{-2t/RC}.$$

A potência dissipada no resistor é

$$P = RI^2 = R\frac{Q_0^2}{R^2C^2}e^{-2t/RC} = \frac{Q_0^2}{RC^2}e^{-2t/RC}.$$

Assim, $P = -dU/dt$ e portanto a variação da energia armazenada no capacitor é igual à potência dissipada no resistor.

Formulário

$$\vec{F}=q\vec{E},\quad \vec{E}=\frac{q(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3},\quad \vec{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{r^2}\hat{r},\quad d\mathcal{V}=dxdydz,\quad d\mathcal{V}=4\pi r^2dr,$$

$$\Phi_E=\int\vec{E}\cdot d\vec{A},\quad \oint\vec{E}\cdot d\vec{A}=\frac{q_{int}}{\epsilon_0},\quad V=\frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|},\quad V_B-V_A=-\int_A^B\vec{E}\cdot d\vec{\ell},$$

$$V=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{r},\quad \vec{E}=-\vec{\nabla}V,\quad V=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i\frac{q_i}{r_i},\quad U=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i<j}\frac{q_i\,q_j}{r_{ij}},\quad \frac{\epsilon}{\epsilon_0}=\kappa,\quad u=\frac{\epsilon_0}{2}E^2,$$

$$E=\frac{E_0}{\kappa},\quad u=\frac{\epsilon}{2}E^2,\quad \oint\epsilon_0\kappa\vec{E}\cdot d\vec{A}=q_{int-liv},\quad I=\frac{dQ}{dt}=n|q|v_dA,\quad \vec{J}=n|q|\vec{v}_d,\quad V=RI,$$

$$P=VI=I^2R=\frac{V^2}{R},\quad \vec{F}=q\vec{E}+q\vec{v}\times\vec{B},\quad \Phi_B=\int\vec{B}\cdot d\vec{A},\quad \oint\vec{B}\cdot d\vec{A}=0,\quad d\vec{F}=Id\vec{\ell}\times\vec{B},$$

$$\vec{\mu}=I\vec{A},\quad \vec{\tau}=\vec{\mu}\times\vec{B},\quad U=-\vec{\mu}\cdot\vec{B},\quad d\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2},\quad \oint\vec{B}\cdot d\vec{\ell}=\mu_0 I_{int},$$

$$\mathcal{E}=-\frac{d\Phi_m}{dt},\quad \vec{B}_0=\mu_0\vec{H},\ \ \vec{B}_m=\mu_0\vec{M},\ \ \vec{M}=\chi_m\vec{H}=\chi_m\frac{\vec{B}_0}{\mu_0},\ \ \vec{B}=\vec{B}_0+\vec{B}_m,$$

$$\vec{B}=\mu_0(1+\chi_m)\vec{H}=(1+\chi_m)\vec{B}_0,\quad \mu=K_m\mu_0=(1+\chi_m)\mu_0,\quad \oint\vec{E}\cdot d\vec{\ell}=-\frac{d}{dt}\int\vec{B}\cdot d\vec{A},$$

$$\Phi^{total}=N\phi_{espira}=LI,\quad \Phi_{21}^{total}=N_2\phi_{espira}=M_{21}I_1,\quad u=\frac{B^2}{2\mu_0},\quad U=\frac{LI^2}{2},\quad u=\frac{B^2}{2\mu}.$$