**Física III - 4320301**

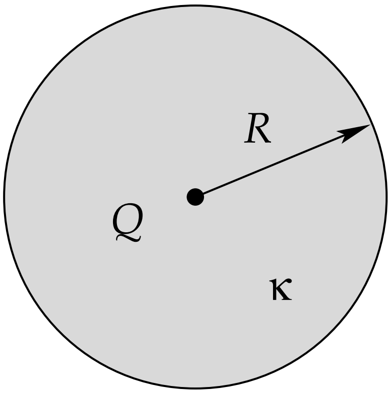
Escola Politécnica - 2013

GABARITO DA PS

**27 de junho de 2013**

## Questão 1

Uma carga pontual $Q > 0$ se encontra no centro de uma esfera dielétrica maciça de raio $R$ e constante dielétrica $\kappa$. Não há cargas livres na esfera dielétrica.




(a) (1,0 ponto) Calcule o vetor campo elétrico a uma distância $r$ do centro tanto fora $(r > R)$ quanto dentro $(r < R)$ da esfera dielétrica.

(b) (0,5 pontos) Calcule o potencial elétrico fora da esfera dielétrica a uma distância $r > R$ do centro. Adote potencial nulo no infinito.

(c) (1,0 ponto) Idem, no interior da esfera dielétrica a uma distância $r < R$ do centro.

**Solução da questão 1**

(a) Devido à simetria esférica o campo elétrico deve ter a forma $\vec{E} = E(r)\hat{r}$. Aplicando a lei de Gauss em meios dielétricos para uma superfície gaussiana esférica de raio $r$ obtemos

$$\int_S \epsilon\vec{E}\cdot d\vec{A} = \epsilon E(r)(4\pi r^2) = Q_{\text{livre}} = Q. \quad \text{Logo} \quad E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon}\frac{1}{r^2}.$$

Como $\epsilon = \epsilon_0$ para $r > R$ e $\epsilon = \kappa\epsilon_0$ para $r < R$,

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}, \quad (r > R) \quad \text{e} \quad \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\kappa\epsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}, \quad (r < R).$$

(b) Potencial elétrico para $r > R$

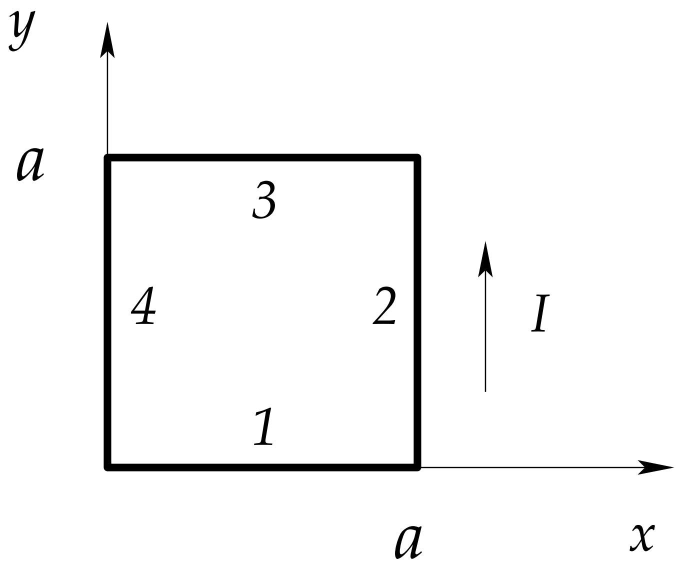
$$V(r) = -\int_\infty^r E(r)dr = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_\infty^r \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}.$$

(c) Potencial elétrico para $r < R$

$$V(r) = -\int_\infty^r E(r)dr = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_\infty^R \frac{dr}{r^2} - \frac{Q}{4\pi\kappa\epsilon_0}\int_R^r \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\kappa r} - \frac{1}{\kappa R}\right).$$

## Questão 2

Uma espira quadrada de lado $a$ onde circula uma corrente $I$ no sentido indicado na figura está imersa num campo magnético externo $\vec{B}$.




(a) (1,0 ponto) Para o campo magnético externo dado por $\vec{B} = B_0\hat{\jmath}$ calcule o momento magnético da espira e o torque atuando sobre ela.

(b) (1,5 pontos) Para o campo magnético externo dado por

$$\vec{B} = B_0 \left(1 - \frac{2y}{a}\right) \hat{\jmath},$$

calcule as forças resultantes em cada um dos lados da espira e o torque produzido por elas em relação ao centro da espira.

**Solução da questão 2**

(a) Momento magnético da espira

$$\vec{\mu} = I\vec{A} = Ia^2\widehat{k}.$$

Torque sobre a espira

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} = -Ia^2 B_0 \widehat{\imath}.$$

(b) Força resultante em cada um dos lados da espira

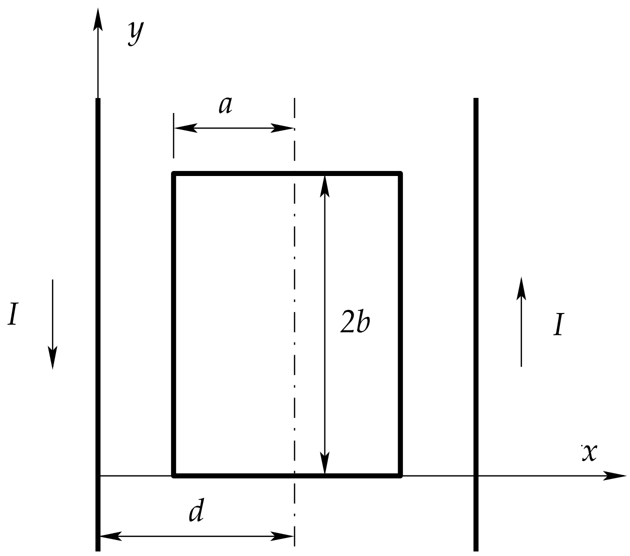
$$\begin{aligned}
\vec{F}_1 &= I(a\widehat{\imath}) \times (B_0\widehat{\jmath}) = IaB_0\widehat{k},\\
\vec{F}_2 &= \int_0^a I(dy\widehat{\jmath}) \times [B(y)\widehat{\jmath}] = \vec{0},\\
\vec{F}_3 &= I(-a\widehat{\imath}) \times (-B_0\widehat{\jmath}) = IaB_0\widehat{k},\\
\vec{F}_4 &= \int_a^0 I(dy\widehat{\jmath}) \times [B(y)\widehat{\jmath}] = \vec{0}.
\end{aligned}$$

Torque em relação ao centro da espira

$$\vec{\tau} = \sum_{i=1}^{4} \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \left(-\frac{a}{2}\widehat{\jmath}\right) \times \vec{F}_1 + \left(\frac{a}{2}\widehat{\jmath}\right) \times \vec{F}_3 = \vec{0}.$$

## Questão 3

Uma espira retangular de resistência $R$ e lados $2a$ e $2b$ encontra-se entre dois fios paralelos muito longos separados de uma distância $2d$ com $d > a$, conforme a figura. Os fios são percorridos por correntes iguais a $I$ em sentidos opostos.




(a) (1,0 ponto) Os dois fios paralelos muito longos estão conectados entre si nas extremidades formando um circuito fechado. Calcule a mútua indutância entre a espira e o circuito dos dois fios paralelos. Dado: o campo magnético a uma distância $r$ de um fio infinito percorrido por uma corrente $I$ é $\mu_0 I/(2\pi r)$.

(b) (0,5 pontos) Determine a corrente induzida na espira supondo que a corrente nos fios <u>oscila no tempo</u> de acordo com $I = I(t) = I_0 \cos \omega t$, sendo $I_0$ e $\omega$ constantes.

(c) (1,0 ponto) Suponha agora que a corrente $I$ nos fios é <u>constante no tempo</u>, mas que a espira se move para a direita com velocidade constante $v$. Determine a corrente induzida na espira quando o seu centro está a uma distância $s$ do fio esquerdo (supor a espira inteiramente entre os dois fios, ou seja, $a < s < 2d - a$).

**Solução da questão 3**

(a) Campo magnético dos fios

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}\widehat{k} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(2d-x)}\widehat{k} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2d-x}\right)\widehat{k}.$$

Fluxo magnético através da espira (normal $\widehat{n} = \widehat{k}$)

$$\Phi = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{A} = \int_{x=d-a}^{d+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2d-x}\right)(2b dx) = \frac{2\mu_0 I b}{\pi}\ln\left(\frac{d+a}{d-a}\right).$$

Mútua indutância

$$M = \frac{\Phi}{I} = \frac{2\mu_0 b}{\pi}\ln\left(\frac{d+a}{d-a}\right).$$

(b) Corrente induzida na espira

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{M}{R}\frac{dI}{dt} = \frac{2\mu_0 b}{\pi R}\ln\left(\frac{d+a}{d-a}\right) I_0\omega \operatorname{sen}\omega t.$$

(c) Fluxo magnético através da espira

$$\Phi = \int_{x=s-a}^{s+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2d-x}\right)(2b dx) = \frac{\mu_0 I b}{\pi}\left[\ln\left(\frac{s+a}{s-a}\right) + \ln\left(\frac{2d-s+a}{2d-s-a}\right)\right].$$

Fem induzida

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 I b}{\pi}\left(\frac{1}{s+a} - \frac{1}{s-a} - \frac{1}{2d-s+a} + \frac{1}{2d-s-a}\right)\frac{ds}{dt}.$$

Corrente induzida na espira

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{2\mu_0 I a b}{\pi R}\left[\frac{1}{s^2-a^2} - \frac{1}{(2d-s)^2-a^2}\right]v.$$

## Questão 4

Um solenóide é construído enrolando-se de forma uniforme $N$ voltas de fio em torno de um núcleo de ferro cilíndrico de comprimento $l$ e raio $a$ ( $l \gg a$). O fio apresenta uma resistência por unidade de comprimento igual a $k$, e a permeabilidade do ferro é 5000 $\mu_0$.

(a) (0,5 pontos) Calcule a resistência do enrolamento.

(b) (1,0 ponto) Usando a lei de Ampère calcule o campo magnético na região central do núcleo quando o fio é percorrido por uma corrente $I$.

(c) (1,0 ponto) Calcule a auto-indutância do solenóide.

**Solução da questão 4**

(a) Resistência do fio

$$R = kN(2\pi a) = 2\pi kNa.$$

(b) Na região central o campo $\vec{H}$ pode ser considerado uniforme e paralelo ao núcleo. Escolhendo-se um circuito amperiano retangular com um dos lados de comprimento $\Delta l$ dentro do núcleo e o lado oposto fora obtemos

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = H\Delta l = I_{\text{livre}} = \frac{N}{l}\Delta l I. \qquad \text{Logo,} \quad H = \frac{N}{l} I.$$

Campo magnético

$$B = \mu H = 5000\mu_0 \frac{N}{l} I.$$

(c) Fluxo através do solenóide

$$\Phi = BN(\pi a^2) = 5000\pi a^2 \mu_0 \frac{N^2}{l} I.$$

Auto-indutância

$$L = \frac{\Phi}{I} = 5000\pi a^2 \mu_0 \frac{N^2}{l}.$$

**Formulário**

$$\vec{F}=q\vec{E},\quad \vec{E}=\frac{q(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3},\quad \vec{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{r^2}\hat{r},\quad p=qd,\quad \vec{\tau}=\vec{p}\times\vec{E},\quad U=-\vec{p}\cdot\vec{E},$$

$$\Phi_E=\int\vec{E}\cdot d\vec{A},\quad \oint\vec{E}\cdot d\vec{A}=\frac{q_{int}}{\epsilon_0},\quad V=\frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|},\quad V_B-V_A=-\int_A^B\vec{E}\cdot d\vec{\ell},$$

$$V=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{r},\quad \vec{E}=-\vec{\nabla}V,\quad V=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i\frac{q_i}{r_i},\quad U=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i<j}\frac{q_i\,q_j}{r_{ij}},\quad \frac{\epsilon}{\epsilon_0}=\kappa,\quad u=\frac{\epsilon_0}{2}E^2,$$

$$E=\frac{E_0}{\kappa},\quad u=\frac{\epsilon}{2}E^2,\quad \oint\epsilon_0\kappa\vec{E}\cdot d\vec{A}=q_{int-liv},\quad I=\frac{dQ}{dt}=n|q|v_dA,\quad \vec{J}=n|q|\vec{v}_d,\quad V=RI,$$

$$P=VI=I^2R=\frac{V^2}{R},\quad \vec{F}=q\vec{E}+q\vec{v}\times\vec{B},\quad \Phi_B=\int\vec{B}\cdot d\vec{A},\quad \oint\vec{B}\cdot d\vec{A}=0,\quad d\vec{F}=Id\vec{\ell}\times\vec{B},$$

$$\vec{\mu}=I\vec{A},\quad \vec{\tau}=\vec{\mu}\times\vec{B},\quad U=-\vec{\mu}\cdot\vec{B},\quad d\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2},\quad \oint\vec{B}\cdot d\vec{\ell}=\mu_0 I_{int},$$

$$\mathcal{E}=-\frac{d\Phi_m}{dt},\quad \vec{B}_0=\mu_0\vec{H},\ \ \vec{B}_m=\mu_0\vec{M},\ \ \vec{M}=\chi_m\vec{H}=\chi_m\frac{\vec{B}_0}{\mu_0},\ \ \vec{B}=\vec{B}_0+\vec{B}_m,$$

$$\vec{B}=\mu_0(1+\chi_m)\vec{H}=(1+\chi_m)\vec{B}_0,\quad \mu=K_m\mu_0=(1+\chi_m)\mu_0,\quad \oint\vec{E}\cdot d\vec{\ell}=-\frac{d}{dt}\int\vec{B}\cdot d\vec{A},$$

$$\Phi^{total}=N\phi_{espira}=LI,\quad \Phi_{21}^{total}=N_2\phi_{espira}=M_{21}I_1,\quad u=\frac{B^2}{2\mu_0},\quad U=\frac{LI^2}{2},\quad u=\frac{B^2}{2\mu}.$$