Física III - 4320301

Escola Politécnica - 2014

GABARITO DA P1

2 de abril de 2014

Questão 1

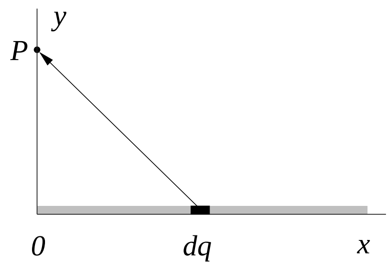
Uma barra semi-infinita, mostrada na figura ao longo do lado positivo do eixo horizontal x, possui carga positiva homogeneamente distribuída com densidade linear λ.

(a) (1,5 ponto) Determine o vetor campo elétrico num ponto $P = (0, y)$ sobre o lado positivo do eixo y.

(b) (1,0 ponto) Calcule a diferença de potencial eletrostático $\Delta V \equiv V_B - V_A$ entre os pontos $A = (0, a)$ e $B = (0, b)$ sobre o lado positivo do eixo y, como indicados na figura.

Solução da questão 1

(a) O campo elétrico produzido pelo elemento de carga dq é



$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3},$$

$$\text{onde}\begin{cases} \vec{r} = -x\widehat{\imath} + y\widehat{\jmath}, \\ r = \sqrt{x^2+y^2}, \\ dq = \lambda dx. \end{cases}$$

O campo total é

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_0^\infty \frac{-x\widehat{\imath} + y\widehat{\jmath}}{(x^2+y^2)^{3/2}}dx = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{(x^2+y^2)^{1/2}}\widehat{\imath} + \frac{x}{y(x^2+y^2)^{1/2}}\widehat{\jmath}\right]_0^\infty$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 y}(-\widehat{\imath} + \widehat{\jmath})}.$$

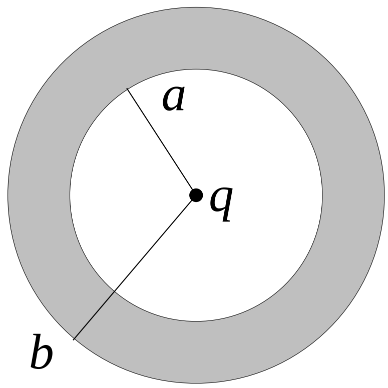
(b) A diferença de potencial pode ser calculada integrando-se o campo

$$\Delta V \equiv V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\int_a^b E_y dy = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_a^b \frac{dy}{y},$$

$$\Longrightarrow \boxed{\Delta V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\log\left(\frac{a}{b}\right)}.$$

Questão 2

Uma camada esférica condutora, neutra, tem raio interno a e raio externo b. No centro da camada, na cavidade interna, há uma carga puntiforme $q > 0$.

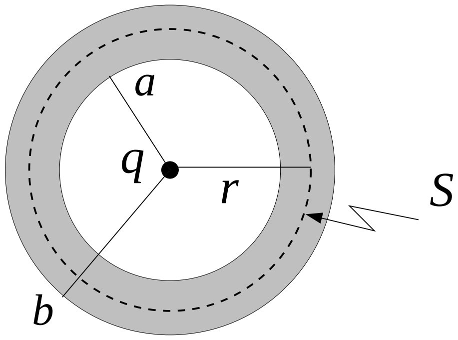


(a) (1,5 ponto) Usando a lei de Gauss e propriedades dos condutores em equilíbrio eletrostático determine as densidades superficiais de carga $\sigma(a)$ e $\sigma(b)$ nas superfícies interna e externa da camada esférica.

(b) (1,0 ponto) Calcule o vetor campo elétrico em todo o espaço.

Solução da questão 2

(a) No equilíbrio, o campo no interior do condutor é zero e todas as cargas elétricas estão nas superfícies interna e externa do condutor.



Seja S uma superfície gaussiana esférica de raio r, com $a < r < b$, concêntrica com a camada esférica. A lei de Gauss fornece

$$0 = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_a + q}{\epsilon_0} \Longrightarrow q_a = -q,$$

onde usamos que $\vec{E} = \vec{0}$ dentro do metal e q_a é a carga induzida por q na superfície interna da camada. Por simetria q_a está uniforme-mente distribuída. Portanto,

$$\boxed{\sigma_a = \frac{-q}{4\pi a^2}}.$$

Como a camada condutora é neutra, a carga induzida na superfíce externa $q_b = q$. Por simetria esta carga também está uniformemente distribuída.

$$\boxed{\sigma_b = \frac{q}{4\pi b^2}}.$$

(b) Por simetria, em todo os espaço $\vec{E} = E(r)\hat{r}$ ($E(r)$ pode ser zero). Usando uma superfície esférica S de raio r, concêntrica com a camada, podemos escrever

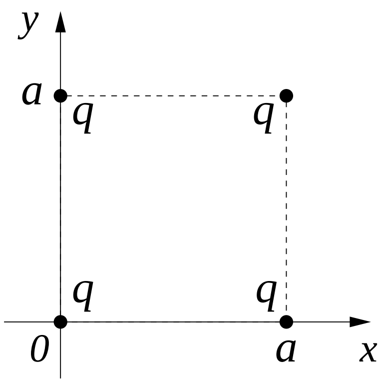
$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(r) 4\pi r^2 = \frac{q_{in}}{\epsilon_0},$$

onde q_{in} é a carga no interior da superfície S. Assim,

$$\boxed{\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\hat{r} \quad \text{para} \quad 0 < r < a \\ 0 \quad \text{para} \quad a < r < b \\ \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\hat{r} \quad \text{para} \quad r > b. \end{cases}}$$

Questão 3

Quatro partículas puntiformes com cargas e massas iguais estão dispostas nos vértices de um quadrado de lado a.



(a) (0,5 ponto) Qual é o vetor força elétrica sobre a carga na posição (x=a,y=a)?

(b) (1,0 ponto) Que trabalho foi realizado para trazer a última carga para o seu lugar desde o infinito?

(c) (1,0 ponto) Qual é a energia cinética de cada carga no infinito se forem retirados simultaneamente todos os vínculos que prendem as cargas em seus lugares?

Solução da questão 3

(a) As cargas em $(a,0)$ e em $(0,a)$ estão a uma distância a da carga em (a,a) e a carga em $(0,0)$ está a uma distância $a\sqrt{2}$. Portanto,

$$\vec{F} = q\vec{E} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{a^2}\,\widehat{\imath} + \frac{1}{a^2}\,\widehat{\jmath} + \frac{1}{2a^2}\,\frac{(\widehat{\imath}+\widehat{\jmath})}{\sqrt{2}}\right] \Longrightarrow \boxed{\vec{F} = \frac{(4+\sqrt{2})q^2}{16\pi\epsilon_0 a^2}\,(\widehat{\imath}+\widehat{\jmath})}.$$

(b) O trabalho para trazer a última carga do infinito é igual à $W = qV_3$, onde V_3 é o potencial devido às outras três cargas no ponto onde a última carga vai ficar. Duas cargas ficam a uma distância a da última carga e uma carga vai fica a uma distância $a\sqrt{2}$ da última. Portanto,

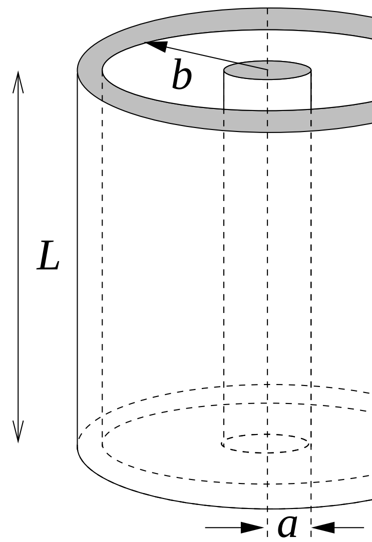
$$V_3 = 2\times\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a\sqrt{2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}\left[2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \Longrightarrow \boxed{W = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a}\left[2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right]}.$$

(c) Por conservação de energia, a energia cinética das cargas no infinito é igual à energia potencial do sistema de cargas. Por simetria, a energia cinética das quatro cargas é igual. Há 6 pares de cargas. Em 4 deles as cargas estão a uma distância a uma da outra e em 2 pares a uma distância $a\sqrt{2}$. Assim,

$$E_{cin} = \frac{1}{4}\left[4\times\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a} + 2\times\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a\sqrt{2}}\right] \Longrightarrow \boxed{E_{cin} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a}\left[1+\frac{\sqrt{2}}{4}\right]}.$$

Questão 4

Um cilindro condutor de comprimento L e raio a, com carga $Q > 0$, é coaxial a uma camada cilíndrica condutora maior, com raio interno $b > a$ e carga $-Q$. Despreze efeitos de borda.



(a) (1,0 ponto) Calcule o vetor campo elétrico $\vec{E}$ na região $a < r < b$.

(b) (1,0 ponto) Calcule a capacitância C do sistema.

(c) (0,5 ponto) Qual é a energia eletrostática armazenada no sistema?

Solução da questão 4

(a) Usando a lei de Gauss em uma superfície cilíndrica de raio r coaxial com o fio tem-se

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \Longrightarrow E2\pi r L = \frac{Q}{\epsilon_0} \Longrightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L r}\widehat{r}} \quad \text{(radial)}$$

(b) A capacitância é dada por

$$C = \frac{Q}{|V|}$$

$$V = V_b - V_a = -\int_a^b E_r dr = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L}\int_a^b \frac{dr}{r} \Longrightarrow |V| = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L}\log\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\boxed{C = \frac{Q}{|V|} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\log(b/a)}}$$

(c) A energia armazenada no sistema é

$$\boxed{U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 L}\log\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Formulário

$$\vec{F} = \frac{qq'(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3}, \qquad \vec{F} = q\vec{E}, \quad \vec{E} = \frac{q(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3}, \qquad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\vec{r}}{r^3}\, dq,$$

$$p = qd, \quad \vec{\tau} = \vec{p}\times\vec{E}, \quad U = -\vec{p}\cdot\vec{E}, \quad \Phi_E = \int \vec{E}\cdot d\vec{A}, \quad \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0},$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|}, \quad V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{\ell}, \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{r}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V,$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}, \quad U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i<j}\frac{q_i\, q_j}{r_{ij}}, \quad C = Q/V, \quad U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} = \frac{QV}{2},$$

$$\int \frac{dt}{(t^2+\alpha^2)^{1/2}} = \ln(t+\sqrt{t^2+\alpha^2}), \qquad \int \frac{dt}{t(t^2+\alpha^2)^{1/2}} = \frac{-1}{\alpha}\ln\left(\frac{t+\sqrt{t^2+\alpha^2}}{t}\right),$$

$$\int \frac{dt}{(t^2+\alpha^2)^{3/2}} = \frac{t}{\alpha^2(t^2+\alpha^2)^{1/2}}, \qquad \int \frac{t\, dt}{(t^2+\alpha^2)^{3/2}} = \frac{-1}{(t^2+\alpha^2)^{1/2}}.$$