Física III - 4320301

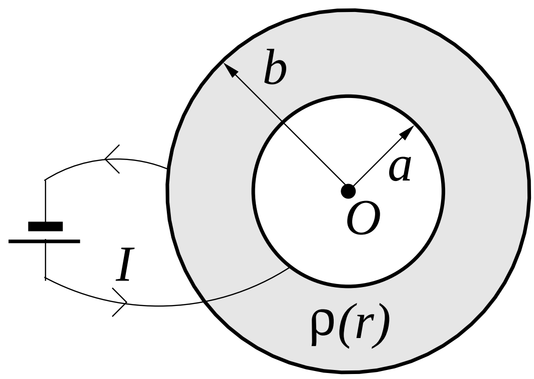
Escola Politécnica - 2014

GABARITO DA P2

14 de maio de 2014

Questão 1

A região entre duas cascas esféricas condutoras concêntricas de raios a e b com $b > a$ é preenchida com um material de resistividade elétrica $\rho(r) = Cr^2$, onde r é a distância até o centro O das cascas esféricas e C é uma constante. Ligando-se uma bateria às cascas esféricas como na figura observa-se uma corrente I no sentido indicado.



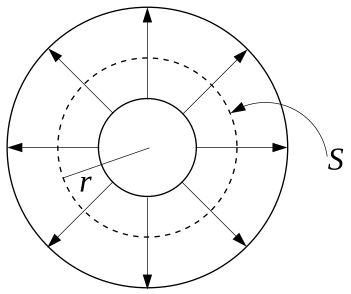
(a) (1,0 ponto) Calcule o vetor densidade de corrente $\vec{J}$ na região entre as cascas $a < r < b$.

(b) (0,5 ponto) Usando a lei de Ohm, determine o vetor campo elétrico entre as cascas esféricas.

(c) (1,0 ponto) Calcule a resistência desse sistema em função de C, a e b.

Solução da questão 1

(a) A corrente flui radialmente, logo $\vec{J} = J(r)\widehat{e}_r$. A corrente que passa por uma superfície esférica S de raio r concêntrica com as duas esferas é I (conservação da carga). Assim,



$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{A} = \int_S J(r) dA = J(r) \int_S dA$$

$$= J(r) 4\pi r^2 \Longrightarrow \boxed{\vec{J}(r) = \frac{I}{4\pi r^2}\,\widehat{e}_r}.$$

(b) Pela lei de Ohm, $\vec{J} = \sigma\vec{E} = \vec{E}/\rho$. Logo,

$$\boxed{\vec{E} = \rho(r)\vec{J}(r) = \frac{CI}{4\pi}\,\widehat{e}_r}.$$

(c) Podemos calcular R através da expressão $V = RI$, onde

$$V = \left| -\int \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \right| = \left| -\int_a^b \frac{CI}{4\pi} dr \right| = \frac{CI(b-a)}{4\,\pi}$$

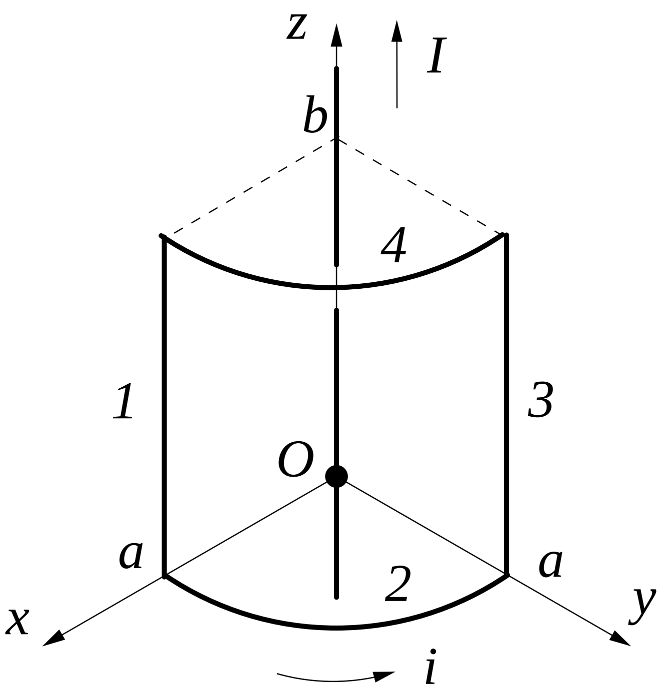
$$\Longrightarrow \boxed{R = \frac{V}{I} = \frac{C(b-a)}{4\,\pi}}.$$

A mesma solução pode ser obtida diretamente através de

$$R = \int_a^b \frac{\rho(r)}{A(r)} dr = \int_a^b \frac{C}{4\pi} dr = \frac{C(b-a)}{4\,\pi}.$$

Questão 2

A espira da figura, formada por dois arcos circulares de raio a e dois lados retilíneos de comprimento b, é percorrida por uma corrente i. Um fio retilíneo muito longo transportando uma corrente I passa pelo centro de curvatura dos arcos circulares (o fio não está em contato com a espira). O módulo do campo magnético produzido pelo fio é $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$, onde r é a distância ao fio.



(a) (1,5 pontos) Calcule o vetor força resultante exercida sobre cada um dos lados da espira pelo fio.

(b) (1,0 ponto) Calcule o vetor torque resultante em relação à origem O exercido sobre a espira pelo fio.

Solução da questão 2

(a) Força sobre lado 1

$$\vec{F}_1 = i(-b\widehat{k}) \times \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\widehat{\jmath}\right) = \boxed{\frac{\mu_0 i I b}{2\pi a}\widehat{\imath}}.$$

Força sobre lado 3

$$\vec{F}_3 = i(b\widehat{k}) \times \left(-\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\widehat{\imath}\right) = \boxed{-\frac{\mu_0 i I b}{2\pi a}\widehat{\jmath}}.$$

Força sobre lados 2 e 4

$$d\vec{F}_2 = d\vec{F}_4 = \vec{0} \quad \text{pois } d\vec{l} \parallel \vec{B}. \quad \text{Logo,} \quad \boxed{\vec{F}_2 = \vec{F}_4 = \vec{0}}.$$

(b) Torque sobre cada lado em relação à origem O

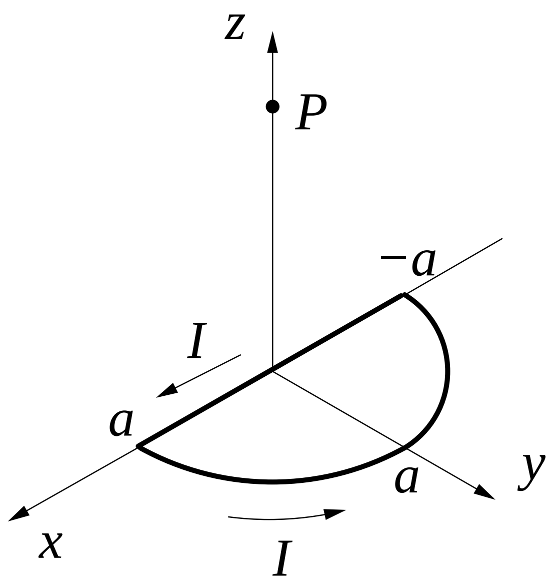
$$\vec{\tau}_1 = \left(a\widehat{\imath} + \frac{b}{2}\widehat{k}\right) \times \vec{F}_1 = \frac{\mu_0 i I b^2}{4\pi a}\widehat{\jmath},$$
$$\vec{\tau}_3 = \left(a\widehat{\jmath} + \frac{b}{2}\widehat{k}\right) \times \vec{F}_3 = \frac{\mu_0 i I b^2}{4\pi a}\widehat{\imath},$$
$$\vec{\tau}_2 = \vec{\tau}_4 = \vec{0} \quad \text{pois} \quad d\vec{F}_2 = d\vec{F}_4 = \vec{0}.$$

Torque resultante sobre a espira em relação à origem O

$$\boxed{\vec{\tau} = \textstyle\sum_{i=1}^{4} \vec{\tau}_i = \dfrac{\mu_0 i I b^2}{4\pi a}(\widehat{\imath} + \widehat{\jmath})}.$$

Questão 3

Um circuito no plano xy formado por uma semicircunferência de raio a com centro de curvatura na origem e um trecho reto ao longo do eixo x é percorrido por uma corrente I no sentido indicado na figura.



(a) (1,5 ponto) Calcule o vetor campo magnético produzido pelo trecho reto no ponto $P = (0, 0, z)$.

(b) (1,0 ponto) Calcule o vetor campo magnético produzido pelo trecho de semicircunferência no ponto $P = (0, 0, z)$.

Dado: O elemento de linha infinitesimal na semicircunferência é

$d\vec{l} = -a\,\text{sen}\theta\, d\theta\,\hat{\imath} + a\cos\theta\, d\theta\,\hat{\jmath}$, onde o ângulo θ é medido a partir do eixo x.

Solução da questão 3

Lei de Biot-Savart

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}.$$

(a) Trecho reto

$$d\vec{l} = dx\hat{\imath}, \quad \vec{r} = -x\hat{\imath} + z\hat{k}.$$

Portanto

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-a}^{a} \frac{-zdx\hat{\jmath}}{(x^2+z^2)^{3/2}} = \boxed{-\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{a}{z\sqrt{a^2+z^2}}\hat{\jmath}}.$$

(b) Os pontos sobre o arco são dados por $x = a\cos\theta$ e $y = a\sin\theta$, onde θ é o ângulo medido a partir do eixo x. Logo,

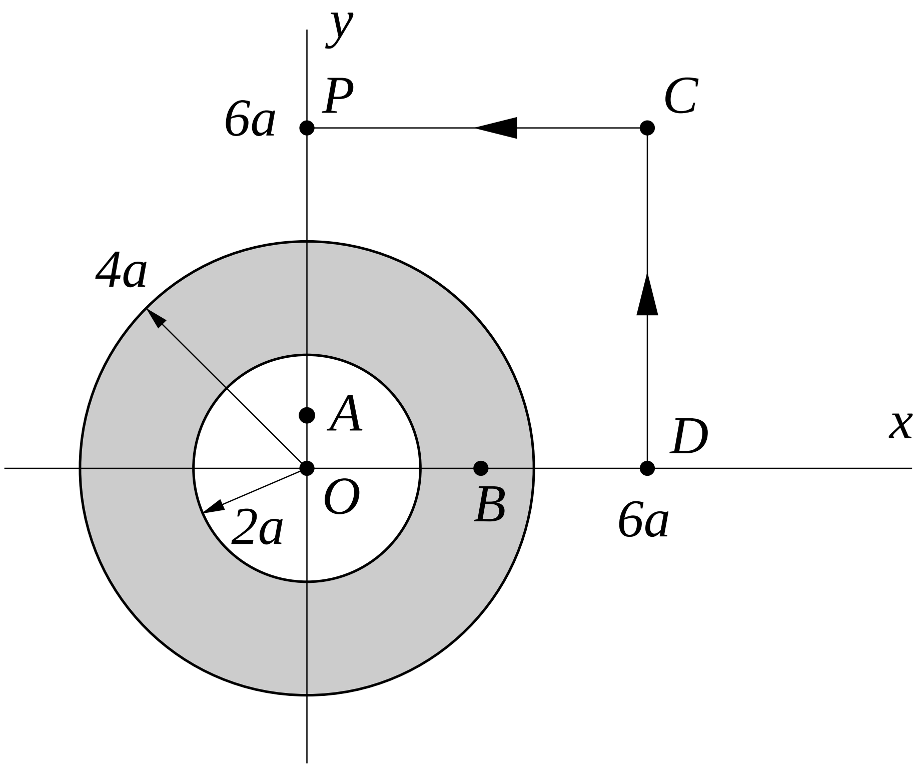
$$d\vec{l} = dx\hat{\imath} + dy\hat{\jmath} = a(-\sin\theta\hat{\imath} + \cos\theta\hat{\jmath})d\theta,$$
$$\vec{r} = -x\hat{\imath} - y\hat{\jmath} + z\hat{k} = -a\cos\theta\hat{\imath} - a\sin\theta\hat{\jmath} + z\hat{k}.$$

Portanto,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{az\cos\theta\hat{\imath} + az\sin\theta\hat{\jmath} + a^2\hat{k}}{(a^2+z^2)^{3/2}} d\theta = \boxed{\frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2az\hat{\jmath} + \pi a^2\hat{k}}{(a^2+z^2)^{3/2}}}.$$

Questão 4

Um tubo de cobre muito longo de raio interno $2a$ e raio externo $4a$ é percorrido por uma corrente I uniformemente distribuída "saindo" da página (sentido positivo do eixo z).



(a) (1,5 pontos) Determine o vetor campo magnético em coordenadas cartesianas (isto é, na forma $\vec{B} = B_x\widehat{\imath} + B_y\widehat{\jmath} + B_z\widehat{k}$) nos pontos $A = (0, a)$, $B = (3a, 0)$ e $C = (6a, 6a)$.

(b) (0,5 ponto) Determine a integral de linha do campo magnético ao longo do caminho fechado $ODCPO$, onde $D = (6a, 0)$ e $P = (0, 6a)$, no sentido indicado.

(c) (0,5 ponto) Determine a integral de linha do campo magnético ao longo do trecho DCP, no sentido indicado.

Solução da questão 4

(a) Aplicando a lei de Ampère obtemos $\vec{B} = \mu_0 I_{\text{int}} \widehat{\phi}/2\pi r$. No ponto A

$$I_{\text{int}} = 0. \quad \text{Logo,} \quad \boxed{\vec{B} = \vec{0}}.$$

No ponto B

$$I_{\text{int}} = \frac{\pi[(3a)^2 - (2a)^2]}{\pi[(4a)^2 - (2a)^2]} I = \frac{5I}{12}. \quad \text{Logo,} \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 (5I/12)}{2\pi(3a)} (\widehat{\jmath}) = \boxed{\frac{5\mu_0 I}{72\pi a}\widehat{\jmath}}.$$

No ponto C

$$I_{\text{int}} = I. \quad \text{Logo,} \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi(6\sqrt{2}a)} \left(\frac{-\widehat{\imath} + \widehat{\jmath}}{\sqrt{2}}\right) = \boxed{\frac{\mu_0 I}{24\pi a}(-\widehat{\imath} + \widehat{\jmath})}.$$

(b) Pela lei de Ampère a circulação ao longo de $ODCPO$ é

$$\oint_{ODCPO} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{int}} = \boxed{\frac{\mu_0 I}{4}}.$$

(c) Como $d\vec{\ell} \perp \vec{B}$ nos trechos OD e PO o resultado é igual ao do item (b).

$$\int_{DCP} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{ODCPO} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \boxed{\frac{\mu_0 I}{4}}.$$

Formulário

$$I = \frac{dQ}{dt} = nqv_d A, \quad \vec{J} = nq\vec{v}_d, \quad J = I/A, \quad \vec{J} = \sigma\vec{E}, \quad \sigma = 1/\rho,$$

$$dR = \rho\frac{d\ell}{A}, \quad V = RI, \quad d\vec{F} = Id\vec{\ell} \times \vec{B}, \quad \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F},$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell} \times \widehat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell} \times \vec{r}}{r^3}, \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{int}, \quad \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2 + a^2}}.$$