Física III - 4320301

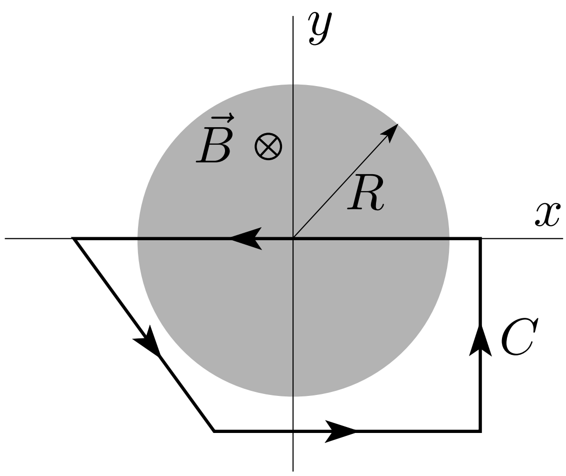
Escola Politécnica - 2014

GABARITO DA P3

25 de junho de 2014

Questão 1

O campo magnético em todos os pontos de uma região cilíndrica de raio R é uniforme e direcionado para dentro da página, variando com o tempo segundo $B = Kt$, onde K é uma constante positiva.



(a) (0,5 ponto) Determine a integral $\oint \vec{E}.d\vec{l}$ do campo elétrico ao longo do circuito C indicado na figura.

(b) (1,0 ponto) Determine o <u>vetor</u> campo elétrico $\vec{E}$ <u>fora</u> da região cilíndrica de raio R.

(c) (1,0 ponto) Determine o <u>vetor</u> campo elétrico $\vec{E}$ <u>dentro</u> da região cilíndrica de raio R.

Solução da questão 1

(a) Usando a lei de Faraday no circuito C

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\cdot\hat{n}dA = -\frac{d}{dt}\left[-B\frac{\pi R^2}{2}\right] = \boxed{K\frac{\pi R^2}{2}}.$$

(b) Usando a simetria cilíndrica do problema podemos assumir que $\vec{E} = E(r)\widehat{\phi}$ onde r é a distância ao eixo z. Tomando um circuito de raio r <u>maior</u> que R e percorrido no sentido anti-horário obtemos

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = E2\pi r = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\cdot\hat{n}dA = -\frac{d}{dt}\left[-B\pi R^2\right] = K\pi R^2$$

$$E = \frac{KR^2}{2r} \Longrightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{KR^2}{2r}\widehat{\phi}}.$$

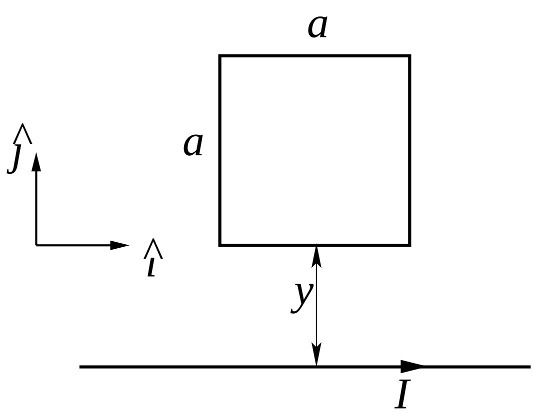
(c) Para calcular o campo $\vec{E}$ no interior da região com campo usamos um circuito com raio r <u>menor</u> do que R e percorrido no sentido anti-horário.

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = E2\pi r = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\cdot\hat{n}dA = -\frac{d}{dt}\left[-B\pi r^2\right] = K\pi r^2$$

$$E = \frac{Kr}{2} \Longrightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{Kr}{2}\widehat{\phi}}.$$

Questão 2

Uma espira quadrada de lado a e resistência R está sobre uma mesa, a uma distância y de um fio muito longo sobre o eixo x que transporta uma corrente I, conforme mostra a figura. O módulo do campo produzido pelo fio é $B = \mu_0 I/(2\pi r)$, onde r é a distância até o fio.



(a) (1,0 ponto) Calcule o fluxo do campo magnético, produzido pelo fio, através da espira.

(b) (1,0 ponto) A espira é movimentada na direção y, afastando-se do fio com velocidade $v = dy/dt$. Use a lei de Lenz para determinar o sentido da corrente induzida na espira (horário ou anti-horário), justificando sua resposta. Calcule a corrente induzida i.

(c) (0,5 ponto) Determine o valor da corrente induzida se a espira é movimentada para a direita (direção x) mantendo constante a distância y até o fio.

Solução da questão 2

(a) O campo magnético produzido pela corrente I (fio reto e longo) é, no plano da espira,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi y'}\widehat{k}.$$

O elemento de área da espira pode ser escrito como

$$d\vec{A} = dx'dy'\widehat{k}.$$

O fluxo magnético na espira é

$$\Phi_m = \int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{A} = \int_0^a dx' \int_y^{y+a} dy' \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi y'}\right) = \frac{\mu_0 I a}{2\pi}\int_y^{y+a}\frac{dy'}{y'} = \boxed{\frac{\mu_0 I a}{2\pi}\ln\left(\frac{y+a}{y}\right)}.$$

(b) O fluxo do campo magnético saindo (direção z) diminui quando a espira se afasta do fio. Conforme a lei de Lenz, a corrente induzida na espira deve se opor a essa diminuição. Portanto a corrente induzida será no <u>sentido anti-horário</u>.

A fem induzida na espira é

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{\mu_0 I a}{2\pi}\frac{d}{dt}\ln\left(\frac{y+a}{y}\right) = -\frac{\mu_0 I a}{2\pi}\frac{d}{dy}\ln\left(\frac{y+a}{y}\right)\frac{dy}{dt}$$

$$= -\frac{\mu_0 I a}{2\pi}\left(\frac{1}{y+a} - \frac{1}{y}\right)v = \frac{\mu_0 I a^2 v}{2\pi y(y+a)}.$$

Portanto a corrente induzida é

$$\boxed{i = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\mu_0 I a^2 v}{2\pi y(y+a)R}}.$$

(c) <u>Neste caso não há variação do fluxo, uma vez que $\vec{B}$ só depende de y. Portanto não há corrente induzida.</u>

Questão 3

Um solenóide longo de comprimento h e raio R ($h >> R$) tem um enrolamento com N espiras. O módulo do campo no interior do solenóide é $B = \mu_0 NI/h$.

(a) (1,5 ponto) Calcule a auto-indutância do solenóide.

(b) (1,0 ponto) Repita o cálculo do item (a) para o caso em que o solenoide está preenchido com um material de suscetibilidade χ_m.

Solução da questão 3

(a) Campo do solenoide

$$B_0 = \mu_0 \frac{NI}{h}.$$

Portanto:

$$\Phi = NB_0\pi R^2 = \mu_0 \frac{N^2\pi R^2 I}{h}$$

$$\boxed{L = \frac{\Phi}{I} = \mu_0 \frac{N^2\pi R^2}{h}}.$$

(b) Na presença do material o campo magnético é

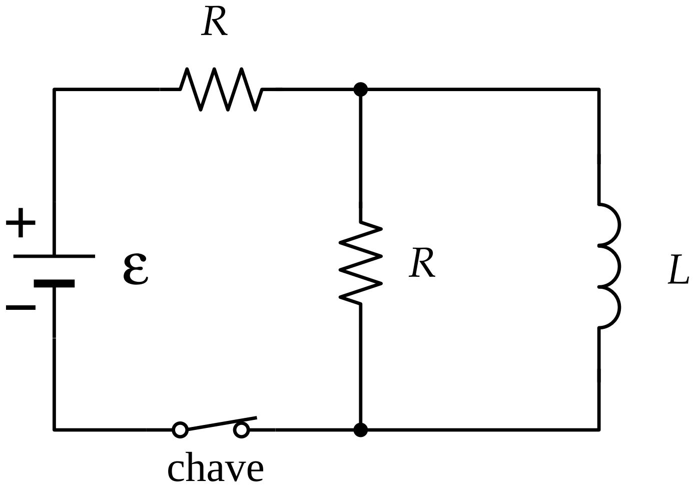
$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H} = (1 + \chi_m)B_0$$

O campo $\vec{B}$ ganha um fator $(1 + \chi_m)$, portanto

$$\boxed{L = (1 + \chi_m)\mu_0 \frac{N^2\pi R^2}{h}}.$$

Questão 4

O circuito abaixo ficou durante um tempo muito longo com a chave fechada. No instante $t = 0$, a chave é aberta.



(a) (0,5 ponto) Determine o valor da corrente I_0 através do indutor no instante $t = 0$ em que a chave é aberta.

Se você não resolver o item (a) deixe os itens (b) e (c) em função de I_0.

(b) (1,5 ponto) Obtenha a equação diferencial para a corrente $I(t)$ através do indutor para $t > 0$ e determine a solução satisfazendo a condição inicial $I(0) = I_0$.

(c) (0,5 ponto) Determine a energia total dissipada por efeito Joule no resistor para $t > 0$.

Solução da questão 4

(a) No regime estacionário a ddp nos terminais do indutor é nula. Como a corrente através do resistor paralelo com o indutor é nula, a corrente no indutor é

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \quad \text{para} \quad t < 0.$$

Como a corrente no indutor não pode variar descontinuamente,

$$\boxed{I(0) \equiv I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}}.$$

(b) Para $t > 0$, temos um circuito RL sem bateria. Portanto,

$$\boxed{RI(t) + L\frac{dI(t)}{dt} = 0}.$$

Definindo $\tau \equiv L/R$, teremos

$$\frac{dI(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau}I(t); \quad \text{com a condição inicial } \; I(0) = I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}.$$

A solução pode ser obtida, por uma integração simples, como

$$\frac{dI}{I} = -\frac{1}{\tau}dt.$$

$$\log(I) = -\frac{1}{\tau}t + const.$$

$$I(t) = \mathrm{e}^{-t/\tau + const.} = \mathrm{e}^{const.}\mathrm{e}^{-t/\tau}.$$

Usando a condição inicial, obtemos $\mathrm{e}^{const.} = I_0$. Logo, a corrente é

$$\boxed{I(t) = I_0\,\mathrm{e}^{-t/\tau}}.$$

(c) A energia inicial será totalmente dissipada no resistor. Portanto, a energia dissipada será

$$\frac{1}{2}L(I_0)^2.$$

Esse resultado também pode ser obtido integrando a energia dissipada instantaneamente. Ou seja,

$$\int_0^\infty RI(t)^2 dt = R(I_0)^2 \int_0^\infty \mathrm{e}^{-2t/\tau}dt = R(I_0)^2\left(-\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{e}^{-2t/\tau}\Big|_0^\infty = R(I_0)^2\left(-\frac{\tau}{2}\right)(0-1)$$

$$= R(I_0)^2\frac{L}{2R} = \boxed{\tfrac{1}{2}L(I_0)^2}.$$

Formulário

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}, \quad \Phi_m = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}, \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0, \quad d\vec{F} = Id\vec{\ell} \times \vec{B}, \quad \vec{\mu} = I\vec{A},$$

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}, \quad U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}, \quad V = RI, \quad P = VI = I^2R = \frac{V^2}{R}, \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{int},$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt}, \quad \vec{B}_0 = \mu_0\vec{H}, \ \ \vec{B}_m = \mu_0\vec{M}, \ \ \vec{M} = \chi_m\vec{H} = \chi_m\frac{\vec{B}_0}{\mu_0}, \ \ \vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_m,$$

$$\vec{B} = \mu_0(1+\chi_m)\vec{H} = (1+\chi_m)\vec{B}_0, \quad \mu = K_m\mu_0 = (1+\chi_m)\mu_0, \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B} \cdot d\vec{A},$$

$$\Phi^{total} = N\phi_{espira} = LI, \quad \Phi_{21}^{total} = N_2\phi_{espira} = M_{21}I_1, \quad u = \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad U = \frac{LI^2}{2}, \quad u = \frac{B^2}{2\mu}.$$