Física III - 4320301

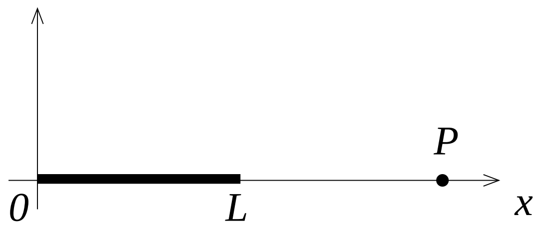
Escola Politécnica - 2014

GABARITO DA PR

23 de julho de 2014

Questão 1

Um bastão de comprimento L, eletrizado com densidade de carga não uniforme $\lambda = \lambda_0 x/L$ está disposto ao longo do eixo x.



(a) (1,5 ponto) Determine o potencial eletrostático devido ao bastão para um ponto $P = (x, 0, 0)$ sobre o eixo x com coordenada $x > L$. Adote o potencial nulo no infinito.

(b) (1,0 ponto) Determine o vetor força $\vec{F}$ de interação eletrostática sobre uma carga pontual q em $P = (2L, 0, 0)$.

$\boxed{\textbf{Solução da questão 1}}$

(a) O potencial devido ao bastão é

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r} = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 L}\int_0^L \frac{x' dx'}{x - x'} = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 L}\left[x - x' - x\ln(x - x')\right]_0^L$$

$$\boxed{V(x,0,0) = -\frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0}\left\{1 + \frac{x}{L}[\ln(x-L) - \ln x]\right\}}$$

(b) Por simetria $E_y = E_z = 0$ em P.

$$E_x(x,0,0) = -\frac{\partial V(x,0,0)}{\partial x} = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 L}\left\{[\ln(x-L) - \ln x] + x\left(\frac{1}{x-L} - \frac{1}{x}\right)\right\}.$$

Logo em P,

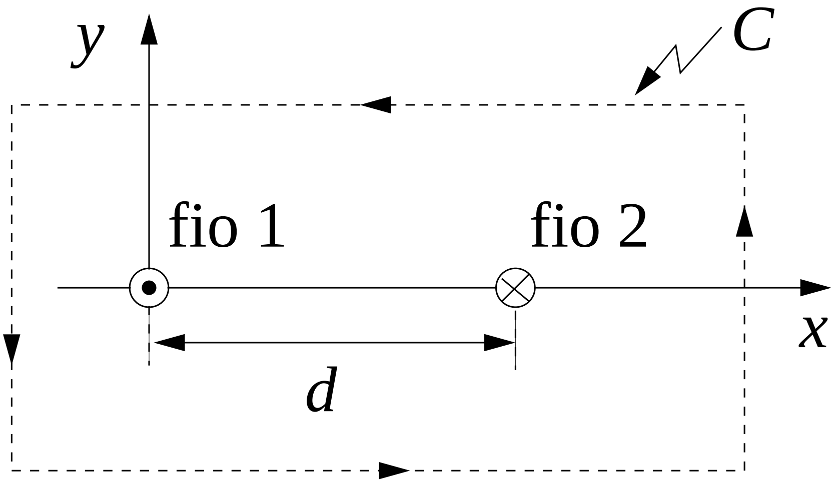
$$E_x(2L,0,0) = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 L}(1 - \ln 2)$$

A força sobre a carga q em P é

$$\boxed{\vec{F} = q\vec{E} = \frac{\lambda_0 q}{4\pi\epsilon_0 L}(1 - \ln 2)\widehat{\imath}}.$$

Questão 2

A figura abaixo mostra uma seção transversal de dois fios condutores longos, idênticos, com comprimento ℓ, estendidos paralelamente um ao outro ao longo da direção z. Por estes fios circulam correntes i_1 e i_2, em sentidos opostos, sendo i_1 no mesmo sentido do eixo z, conforme a figura.



(a) (1,0 ponto) Usando a lei de Ampère calcule o <u>vetor</u> campo magnético de um fio infinito por onde passa uma corrente i.

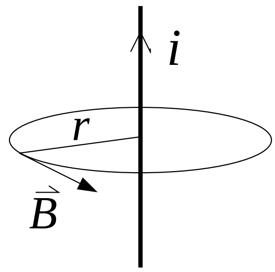
(b) (1,0 ponto) Calcule a força de interação por unidade de comprimento que o fio 1 exerce sobre o fio 2. A força é atrativa ou repulsiva?

(c) (0,5 ponto) Calcule a integral $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$ sobre o percurso C orientado no sentido anti-horário, conforme a figura.

Solução da questão 2

(a) Usando um percurso C circular de raio r, coaxial com o fio, e a lei de Ampère obtemos

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0\, i$$



Como $\vec{B}$ é paralelo a $d\vec{\ell}$ e $B = B(r)$ podemos escrever

$$\oint_C B\, d\ell = B(r)\oint_C d\ell = B2\pi r = \mu_0\, i \Longrightarrow B(r) = \frac{\mu_0\, i}{2\pi r}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{B}(r) = \frac{\mu_0\, i}{2\pi r}\,\widehat{\phi}}$$

(b) A força que o fio 1 exerce sobre o elemento infinitesimal $d\vec{\ell}_2$ do fio 2 é $d\vec{F}_{21} = i_2 d\vec{\ell}_2 \times \vec{B}_1$. Esta força é igual para todos os elementos $d\vec{\ell}_2$ do fio 2. Portanto, a força total sobre o fio 2 é

$$\vec{F}_{21} = i_2\,\vec{\ell}_2 \times \vec{B}_1 = i_2\,(-\ell\,\widehat{k}) \times (B_1\,\widehat{\jmath}) = i_2\,\ell\, B_1\,\widehat{\imath}.$$

Usando o resultado do item (a) obtemos

$$\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0\, i_1\, i_2\,\ell}{2\,\pi\, d}\,\widehat{\imath} \Longrightarrow \boxed{\frac{\vec{F}_{21}}{\ell} = \frac{\mu_0\, i_1\, i_2}{2\,\pi\, d}\,\widehat{\imath}}$$

e <u>a força é repulsiva.</u>

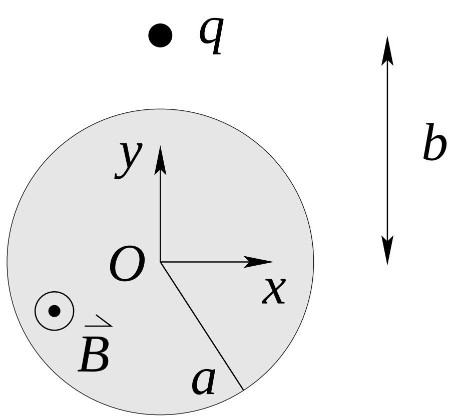
(c) A integral $\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{\ell}$ pode ser calculada usando-se a lei de Ampère:

$$\boxed{\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0\, I_{int} = \mu_0(i_1 - i_2)}.$$

Note que com a orientação adotada a corrente i_1 é positiva e i_2 é negativa.

Questão 3

A figura ao lado mostra a seção transversal de uma região cilíndrica de raio a, coaxial com o eixo z de um sistema de coordenadas, onde existe um campo magnético uniforme dado por



$$\vec{B} = B_0 \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\hat{k}; \quad \alpha \ \text{constante},$$

de modo que $\vec{B}(0) = B_0\hat{k}$ e $\vec{B}(t \to \infty) = 0$.

(a) (1,5 ponto) Obtenha o <u>vetor</u> campo elétrico induzido em todo o espaço, em função de B_0, α e t.

(b) (1,0 ponto) A figura também mostra uma partícula com carga q. Para a partícula na posição indicada na figura ($\vec{r} = b\hat{\jmath}$), obtenha o <u>vetor</u> força elétrica $\vec{F}$ que atua sobre ela. Calcule também o <u>vetor</u> torque da força elétrica em relação à origem O do sistema de coordenadas. Expresse os vetores sob a forma cartesiana, isto é em termos das componentes nas direções x, y e z.

Solução da questão 3

(a) De acordo com a lei de Faraday,

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A}.$$

Por simetria, o campo elétrico induzido deve ser da forma $\vec{E} = E_\phi \widehat{\phi}$.

Usando a lei de Faraday, <u>para $r > a$</u>

$$E_\phi 2\pi r = -\frac{d}{dt} \left(B(t) \pi a^2 \right) = \pi a^2 \alpha B_0 \mathrm{e}^{-\alpha t}.$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{E}(\vec{r}, t) = E_\phi \widehat{\phi} = \frac{\alpha B_0 a^2}{2r} \mathrm{e}^{-\alpha t} \widehat{\phi}}.$$

Usando a lei de Faraday, <u>para $r < a$</u>

$$E_\phi 2\pi r = -\frac{d}{dt} \left(B(t) \pi r^2 \right) = \pi r^2 \alpha B_0 \mathrm{e}^{-\alpha t}.$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{E}(\vec{r}, t) = E_\phi \widehat{\phi} = \frac{\alpha B_0 r}{2} \mathrm{e}^{-\alpha t} \widehat{\phi}}.$$

(b) A força sobre a carga q é

$$\boxed{\vec{F} = q\vec{E}(b\widehat{\jmath}, t) = -\frac{q \alpha B_0 a^2}{2b} \mathrm{e}^{-\alpha t}\, \widehat{\imath}},$$

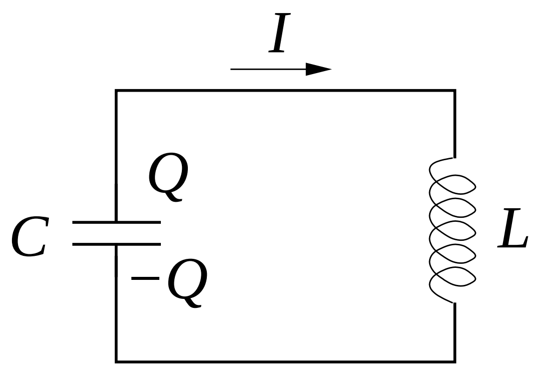
onde usamos que na posição da carga $\widehat{\phi} = -\widehat{\imath}$.

O torque em relação a O é

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = (b\widehat{\jmath}) \times \left(-\frac{q \alpha a^2 B_0}{2b} \mathrm{e}^{-\alpha t}\, \widehat{\imath} \right) = \boxed{\frac{q \alpha a^2 B_0}{2} \mathrm{e}^{-\alpha t}\, \widehat{k}}.$$

Questão 4

No circuito LC abaixo, com o capacitor descarregando, a corrente atinge seu valor máximo I_m no instante $t = 0$.



(a) (1,0 ponto) Escreva a equação diferencial para a carga $Q(t)$ na placa superior do capacitor. Usando o fato de que a corrente é máxima no instante $t = 0$ demonstre que $Q(0) = 0$.

(b) (1,0 ponto) Escreva a solução geral da equação. Determine a carga $Q(t)$ e a corrente $I(t)$ no circuito para $t > 0$ satisfazendo as condições iniciais $Q(0) = 0$ e $I(0) = I_m$.

(c) (0,5 ponto) Calcule a energia total no circuito LC e mostre que ela se conserva.

$\boxed{\textbf{Solução da questão 4}}$

(a) A equação diferencial do circuito é

$$L\frac{dI}{dt} = \frac{Q}{C}.$$

Com o capacitor descarregando $I = -dQ/dt$, portanto

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} = -\frac{Q}{C} \Longrightarrow \boxed{\frac{d^2Q}{dt^2} = -\omega^2 Q},$$

onde colocamos $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$.

A derivada da corrente é dada por

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{d^2Q}{dt^2} = \omega^2 Q$$

Se a corrente é máxima em $t = 0$ devemos ter

$$\left.\frac{dI}{dt}\right|_{t=0} = \omega^2 Q(0) = 0 \Longrightarrow \boxed{Q(0) = 0}.$$

(b) A solução geral da equação encontrada no item (a) é

$$\begin{aligned} Q(t) &= A\cos(\omega t) + B\,\mathrm{sen}(\omega t) \\ I(t) &= -\frac{dQ}{dt} = A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t) - B\omega\cos(\omega t) \end{aligned}$$

Determinamos A e B usando as condições iniciais

$$\begin{aligned} &Q(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \\ &I(0) = I_m \quad \text{e} \quad A = 0 \Rightarrow B = -\frac{I_m}{\omega}. \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \boxed{Q(t) = -\frac{I_m}{\omega}\,\mathrm{sen}(\omega t)} \quad \text{e} \quad \boxed{I(t) = I_m\cos(\omega t)}.$$

(c) A energia total E do sistema é a soma das energias do capacitor e do indutor.

$$E = \frac{Q(t)^2}{2C} + \frac{LI(t)^2}{2} = \frac{I_m^2}{2C\omega^2}\,\mathrm{sen}^2(\omega t) + \frac{LI_m^2}{2}\cos^2(\omega t) = \frac{LI_m^2}{2} = \text{constante},$$

onde usamos $\omega^2 = 1/LC$.

Formulário

$$\vec{F} = \frac{qq'(\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \qquad \vec{F} = q\vec{E}, \quad \vec{E} = \frac{q(\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \qquad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r^2}\widehat{r},$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}, \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V,$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}, \quad C = Q/V, \quad U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} = \frac{QV}{2}, \quad V = RI,$$

$$P = VI = I^2R = \frac{V^2}{R}, \quad \vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}, \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0, \quad d\vec{F} = Id\vec{\ell} \times \vec{B}, \quad \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F},$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell} \times \widehat{r}}{r^2}, \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{int}, \quad \mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B} \cdot d\vec{A},$$

$$u = \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad U = \frac{LI^2}{2}, \quad \int \frac{udu}{x-u} = x - u - x\ln(x-u).$$