Física III - 4320301

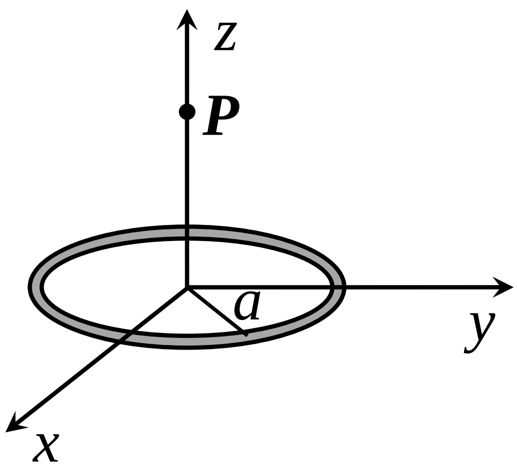
Escola Politécnica - 2014

GABARITO DA PS

2 de julho de 2014

Questão 1

Um anel circular de raio a possui carga elétrica positiva uniformemente distribuída com densidade linear $\lambda > 0$.



(a) (1,0 ponto) Determine o vetor campo elétrico no ponto $P = (0, 0, z)$ sobre o eixo z.

(b) (1,0 ponto) Determine o potencial elétrico no ponto $P = (0, 0, z)$ sobre o eixo z. Adote potencial elétrico nulo no infinito.

(c) (0,5 ponto) Uma partícula puntiforme de massa m e carga elétrica negativa $-q < 0$ passa pela origem $(0, 0, 0)$ com velocidade $\vec{v} = v\widehat{k}$ com $v > 0$. Determine o valor mínimo de v para que a partícula se afaste para o infinito.

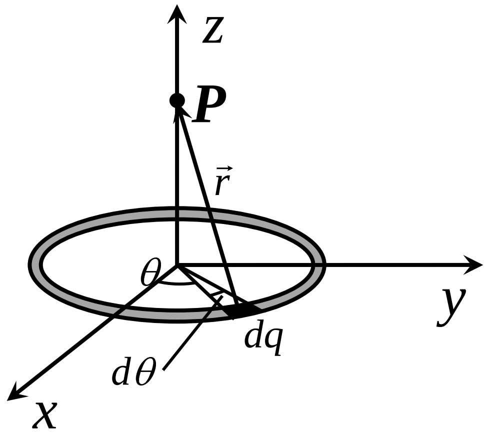
Solução da questão 1

(a) Campo elétrico

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{r}}{r^3} dq.$$

Da figura, no ponto P

$$\vec{r} = -a\cos\theta\hat{\imath} - a\sin\theta\hat{\jmath} + z\hat{k}, \quad r = \sqrt{a^2+z^2} \quad \text{e} \quad dq = \lambda dl = \lambda a d\theta.$$



Logo

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{-a\cos\theta\hat{\imath} - a\sin\theta\hat{\jmath} + z\hat{k}}{(a^2+z^2)^{3/2}} \lambda a d\theta = \boxed{\frac{\lambda a}{2\epsilon_0} \frac{z}{(a^2+z^2)^{3/2}} \hat{k}}$$

(b) Escolhendo-se potencial nulo no infinito

$$V = -\int_{\infty}^{P} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\lambda a}{2\epsilon_0} \int_{\infty}^{z} \frac{z dz}{(a^2+z^2)^{3/2}} = \boxed{\frac{\lambda a}{2\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}}}$$

(c) Por conservação de energia devemos ter

$$\frac{mv^2}{2} + (-q)V(\vec{0}) = \frac{mv^2}{2} - \frac{q\lambda}{2\epsilon_0} > (-q)V(\infty) = 0.$$

Logo

$$\boxed{v > v_{\min} = \sqrt{\frac{\lambda q}{m\epsilon_0}}}$$

$\boxed{\textbf{Questão 2}}$

Considere uma esfera isolante de raio a, com densidade volumétrica de carga que varia com o raio na forma

$$\rho(r) = \begin{cases} \alpha r & \text{para } r \leq a, \\ 0 & \text{para } r > a, \end{cases}$$

onde α é uma constante.

(a) (0,5 pontos) Determine a carga total da esfera.

(b) (1,0 ponto) Determine o vetor campo elétrico em todo o espaço.

(c) (1,0 ponto) Determine o potencial elétrico em todo o espaço. Adote como referência do pontencial nulo um ponto infinitamente distante da esfera.

Solução da questão 2

(a) Carga total

$$Q = \int \rho dV = \int_0^\infty \rho(r)(4\pi r^2 dr) = 4\pi\alpha \int_0^a r^3 dr = \boxed{\pi\alpha a^4}.$$

(b) Devido à simetria esférica $\vec{E} = E(r)\widehat{r}$. Tomando-se uma superfície gaussiana esférica de raio r

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(r)(4\pi r^2) = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}. \qquad \text{Logo} \qquad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_{\text{int}}}{r^2}\widehat{r}.$$

Agora

$$Q_{\text{int}} = \int_0^r \rho(r')(4\pi r'^2 dr') = \begin{cases} \pi\alpha r^4 & \text{para } r < a, \\ Q = \pi\alpha a^4 & \text{para } r \geq a. \end{cases}$$

Logo,

$$\boxed{\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{4\epsilon_0} r^2 \widehat{r} & \text{para } r < a, \\ \dfrac{\alpha}{4\epsilon_0}\dfrac{a^4}{r^2}\widehat{r} & \text{para } r \geq a. \end{cases}}$$

(c) Potencial elétrico para $r \geq a$

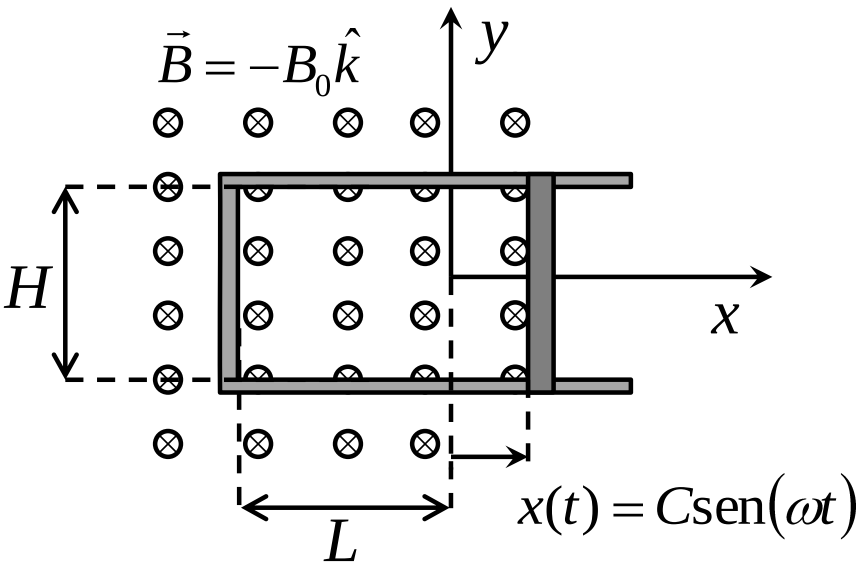
$$V = -\int_\infty^r E(r)dr = \boxed{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r} = \frac{\alpha}{4\epsilon_0}\frac{a^4}{r}}$$

Potencial elétrico para $r < a$

$$V = V(a) - \int_a^r E(r)dr = \frac{\alpha}{4\epsilon_0}a^3 - \frac{\alpha}{4\epsilon_0}\int_a^r r^2 dr = \boxed{\frac{\alpha}{12\epsilon_0}\left(4a^3 - r^3\right)}$$

Questão 3

Um gerador consiste de uma haste condutora de comprimento H que desliza sem atrito sobre um trilho em forma de U. O gerador está numa região com campo magnético uniforme $B = -B_0\widehat{k}$. Uma força externa faz com que a haste realize um movimento harmônico simples em torno do ponto $x = 0$ descrito por $x(t) = C \sin \omega t$.



(a) (1,5 pontos) Determine a corrente induzida. A resistência da haste é R e a do trilho em U pode ser desprezada. Adote o sentido horário como o sentido positivo para a corrente (Com esta convenção a normal à area do circuito aponta para dentro da página.).

(b) (1,0 ponto) Determine o vetor força magnética agindo na haste.

Solução da questão 3

(a) Fluxo magnético através do circuito. Pela regra da mão direita, se o sentido da corrente é horário a normal à superfície aponta para dentro da página.

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = (-B_0\widehat{k}) \cdot (-A\widehat{k}) = B_0 A.$$

Área do circuito

$$A = H(L + x) = HL + HC \sin \omega t.$$

Força eletromotriz induzida

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -B_0 \frac{dA}{dt} = -B_0 HC\omega \cos \omega t.$$

Corrente elétrica

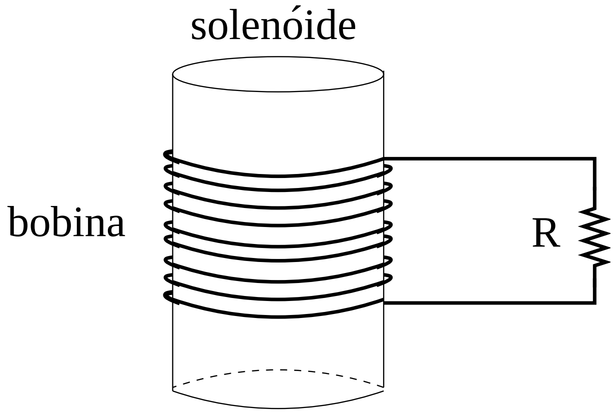
$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \boxed{-\frac{B_0 HC\omega \cos \omega t}{R}}$$

(b) Força magnética na haste é

$$\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B} = I(-H\widehat{\jmath}) \times (-B_0\widehat{k}) = IHB_0\widehat{\imath} = \boxed{-\frac{(B_0 H)^2 C\omega \cos \omega t}{R}\widehat{\imath}}.$$

Questão 4

Um solenóide longo tem n espiras por unidade de comprimento com área seccional A. Enrolado em torno do solenóide há uma bobina com N voltas de fio. Na figura abaixo por simplicidade não desenhamos as espiras do solenóide.



A bobina está longe das extremidades do solenoide e forma um circuito fechado com resistência R. Uma fonte externa fornece corrente elétrica ao solenóide que varia no tempo na forma

$$I(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t \leq 0, \\ I_0(1 - \cos\omega t) & \text{para } 0 \leq t \leq \pi/\omega, \\ 2I_0 & \text{para } t \geq \pi/\omega, \end{cases}$$

onde I_0 e ω são constantes.

(a) (0,5 pontos) Demonstre que o módulo do campo magnético dentro de um solenóide infinito, quando percorrido por uma corrente I, é dado por $B = \mu_0 n I$, onde n é o número de espiras por unidade de comprimento.

(b) (1,0 ponto) Determine a indutância mútua e a corrente induzida na bobina como função do tempo devido à variação da corrente no solenóide. Despreze a auto-indutância da bobina.

(c) (1,0 ponto) Calcule a energia total fornecida à bobina pela fonte externa. Despreze a auto-indutância da bobina.

Solução da questão 4

(a) O campo magnético é paralelo ao solenoide no seu interior e nulo fora. Escolhemos um circuito amperiano retangular com apenas um dos lados de comprimento L no interior e paralelo ao solenóide. Aplicando a lei de Ampère obtemos

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = BL = \mu_0 (nL) I. \qquad \text{Logo} \qquad B = \mu_0 n I.$$

(b) Fluxo magnético através da bobina devido a uma corrente I no solenóide

$$\Phi = NBA = N\left(\mu_0 n I\right) A = nN\mu_0 AI.$$

Indutância mútua

$$M = \frac{\Phi}{I} = \boxed{nN\mu_0 A}$$

Corrente induzida na bobina

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{M}{R}\frac{dI}{dt} = \boxed{\begin{cases} -\dfrac{nN\mu_0 AI_0\omega}{R}\sin\omega t & \text{se } 0 \leq t \leq \pi/\omega, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}}$$

(c) Potência instantânea fornecida à bobina pela fonte externa no intervalo $0 \leq t \leq \pi/\omega$

$$P(t) = Ri^2 = RI_m^2 \sin^2\omega t, \qquad \text{onde} \qquad I_m = \frac{nN\mu_0 AI_0\omega}{R}.$$

Energia total fornecida

$$W = \int_0^{\pi/\omega} P(t)dt = RI_m^2\left(\frac{\pi}{2\omega}\right) = \boxed{\frac{\pi\left(nN\mu_0 AI_0\right)^2\omega}{2R}}$$

Formulário

$$\vec{F} = \frac{qq'(\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \qquad \vec{F} = q\vec{E}, \quad \vec{E} = \frac{q(\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \qquad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r^2}\hat{r},$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{\ell}, \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V,$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}, \quad \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}, \quad U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i<j}\frac{q_i\, q_j}{r_{ij}}, \quad C = Q/V, \quad u = \frac{\epsilon}{2}E^2,$$

$$V = RI, \quad P = VI = I^2R = \frac{V^2}{R}, \quad \vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B}, \quad \oint \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0, \quad d\vec{F} = Id\vec{\ell}\times\vec{B},$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2}, \quad \oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{int}, \quad \mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt}, \quad \oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\cdot d\vec{A},$$

$$\Phi^{total} = N\phi_{espira} = LI, \quad \Phi_{21}^{total} = N_2\phi_{espira} = M_{21}I_1, \quad u = \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad U = \frac{LI^2}{2}, \quad u = \frac{B^2}{2\mu},$$

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{-1}{\sqrt{x^2 + a^2}}, \quad \int \operatorname{sen}^2(ax)dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2ax)}{4a}.$$