Física III - 4323203

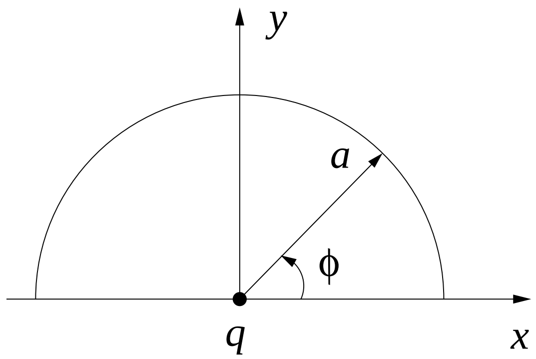
Escola Politécnica - 2015

GABARITO DA P1

9 de abril de 2015

Questão 1

Considere o sistema abaixo, mantido fixo por forças externas, que consiste numa partícula pontual de carga $q > 0$ e massa m, situada na origem dos sistema de coordenadas, e um semi-anel de raio a situado no plano xy e centrado na origem. A densidade linear de carga do semi-anel depende do ângulo ϕ de acordo com a seguinte função: $\lambda(\phi) = \lambda_0 \operatorname{sen} \phi$, onde λ_0 é uma constante positiva.



(a) (0.5 ponto) Calcule a carga total do anel.

(b) (1,0 ponto) Calcule o vetor força elétrica que age sobre a carga pontual.

(c) (1,0 ponto) Suponha que o anel é mantido fixo na sua posição e a partícula é liberada a partir do repouso. Qual será o módulo da velocidade da partícula quando ela se encontrar muito longe ($r \to \infty$) do anel?

$\boxed{\textbf{Solução da questão 1}}$

(a) A carga total Q é

$$Q = \int dq = \int \lambda(\phi) d\ell = \int_0^\pi \lambda_0 \operatorname{sen}\phi \, a \, d\phi = -\lambda_0 a \cos\phi \,|_0^\pi = 2\lambda_0 a$$

(b) Campo produzido pelo semi-anel na origem:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{r}}{r^3} \, dq; \quad \text{onde} \quad \vec{r} = -a\cos\phi \, \widehat{\imath} - a \operatorname{sen}\phi \, \widehat{\jmath}, \quad r = a \quad \text{e} \quad dq = \lambda(\phi) a d\phi.$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{a\cos\phi \, \widehat{\imath} + a \operatorname{sen}\phi \, \widehat{\jmath}}{a^3} \lambda_0 \operatorname{sen}\phi \; a \; d\phi = -\frac{\lambda_0}{8a\epsilon_0} \, \widehat{\jmath}.$$

A força sobre a carga é

$$\vec{F} = q\vec{E} = -\frac{q\lambda_0}{8a\epsilon_0} \, \widehat{\jmath}.$$

(c) Potencial do anel na origem:

$$V(r=0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{r} \, dq = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} \int dq = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a}.$$

A soma da energia potencial com a energia cinética se conserva:

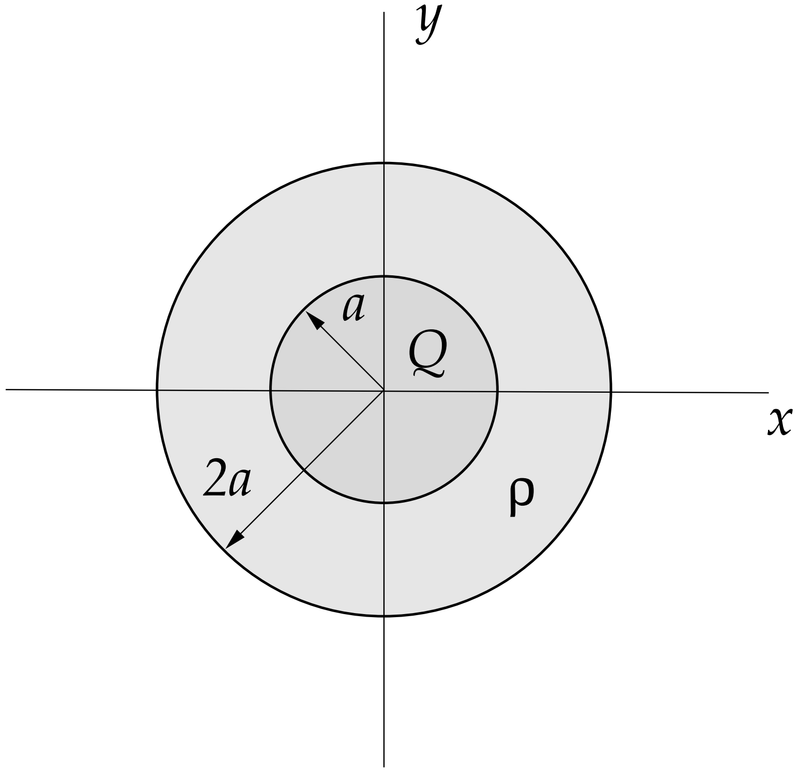
$$qV(\infty) + \frac{1}{2} m v^2 = qV(0) \Longrightarrow \frac{1}{2} m v^2 = q \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a} \Longrightarrow v = \sqrt{\frac{qQ}{2\pi\epsilon_0 m a}}.$$

Usando o resultado do item (a) podemos reescrever v como

$$v = \sqrt{\frac{q\lambda_0}{\pi\epsilon_0 m}}.$$

Questão 2

Uma esfera condutora de raio a e com carga Q é envolta por uma camada esférica isolante de raio interno a e externo $2a$ com densidade de carga volumétrica $\rho = 3Q/(4\pi a^3)$ constante.



(a) (1,5 ponto) Determine o vetor campo elétrico em todo o espaço.

(b) (1,0 ponto) Determine o potencial elétrico em todo o espaço. Adote potencial nulo no infinito.

Solução da questão 2

(a) Devido à simetria esférica $\vec{E} = E(r)\widehat{r}$. Para uma superfície gaussiana de raio r

$$\Phi = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = E(r)(4\pi r^2) = \frac{Q_{\text{in}}}{\epsilon_0}. \quad \text{Logo,} \quad E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q(r)}{r^2},$$

onde $Q_{\text{in}} = Q(r)$ é a carga no interior da esfera de raio r. Para $r < a$, no interior do condutor, $Q(r) = 0$. Para $a < r \leq 2a$,

$$Q(r) = Q + \int \rho dq = Q + \int_a^r \frac{3Q}{4\pi a^3}\left(4\pi r^2 dr\right) = Q\left(\frac{r}{a}\right)^3.$$

Para $r \geq 2a$, $Q(r) = Q(2a) = 8Q$.

Portanto, o campo elétrico é

$$\vec{E} = \begin{cases} \vec{0} & \text{se } r < a, \\ \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{Q\,r}{a^3}\,\widehat{r} & \text{se } a < r \leq 2a, \\ \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{8Q}{r^2}\,\widehat{r} & \text{se } r \geq 2a. \end{cases}$$

(b) Potencial elétrico

$$V = -\int_\infty^r \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\int_\infty^r E(r)dr = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{11Q}{2a} & \text{se } r \leq a, \\ \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{6Q}{a}\left(1 - \dfrac{r^2}{12a^2}\right) & \text{se } a \leq r \leq 2a, \\ \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{8Q}{r} & \text{se } r \geq 2a. \end{cases}$$

Questão 3

Numa certa região do espaço existe um potencial elétrico dado por:

$$V(r) = \begin{cases} \dfrac{\alpha\, a^4}{4r} & \text{para} \quad r > a \\ \dfrac{\alpha}{12}(4a^3 - r^3) & \text{para} \quad r \leq a \end{cases}$$

onde r é a distância até a origem do sistema de coordenadas e α e a são constantes.

(a) (0.5 ponto) Quais são as unidades das constantes α e a no Sistema Internacional de Unidades?

(b) (1,0 ponto) Obtenha o <u>vetor</u> campo elétrico nesta região do espaço.

(c) (1,0 ponto) Quanta carga existe dentro de uma esfera (imaginária) de raio $a/2$ centrada na origem?

Solução da questão 3

(a) A constante a tem unidade m (metro) e α tem unidade V/m^3 (volt / metro cúbico).

(b) Devido à simetria esférica, o campo só tem componente na direção radial. Assim,

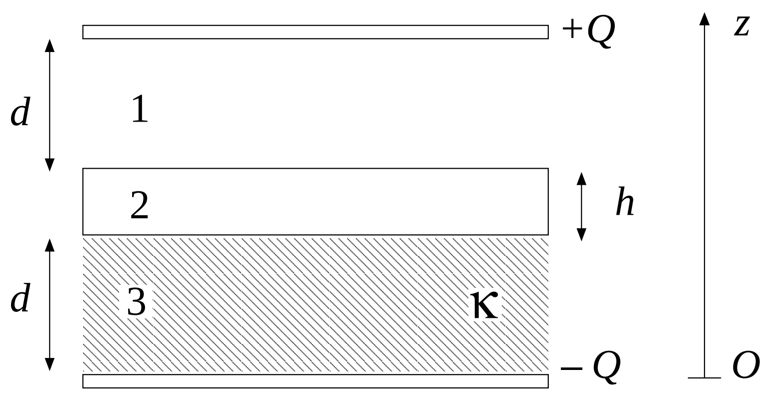
$$\vec{E}(r) = -\frac{dV(r)}{dr}\,\widehat{r} = \begin{cases} \dfrac{\alpha\, a^4}{4r^2}\,\widehat{r} & \text{para} \quad r > a \\ \dfrac{\alpha}{4}\,r^2\,\widehat{r} & \text{para} \quad r \leq a \end{cases}$$

(c) Aplicando a lei de Gauss para a correspondente superfície esférica, vem

$$Q_{int} = \epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \epsilon_0 \oint E\left(r = \frac{a}{2}\right) dA = \epsilon_0\, \frac{\alpha}{4}\, \left(\frac{a}{2}\right)^2\, 4\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi\alpha\epsilon_0 a^4}{16}.$$

Questão 4

Três placas condutoras de área A são espaçadas de d por vácuo (região 1) e de d por um material de constante dielétrica κ (região 3), como indicado na figura. A carga total na placa superior é igual a $Q > 0$, na placa do meio é igual a zero e na placa inferior é igual a $-Q$. Desconsidere a não uniformidade do campo elétrico perto das bordas.



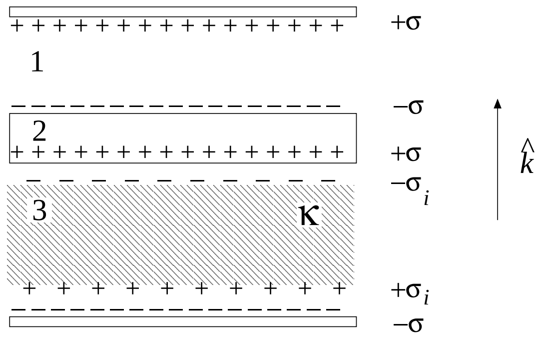
(a) (1,0 ponto) Indique numa figura e calcule as densidades de carga nas superfícies das placas condutoras. Calcule o vetor campo elétrico $\vec{E}$ nas regiões 1, 2 e 3. Expresse suas respostas em termos de ϵ_0, Q, A e κ.

(b) (1,0 ponto) Calcule a capacitância do sistema de três placas.

(c) (0,5 ponto) Calcule a densidade de carga de polarização no dielétrico.

Solução da questão 4

(a) Nas placas metálica superior a cargas se distribui homogeneamente e a densidade é $\sigma = Q/A$. Analogamente, na placa inferior $\sigma = -Q/A$. Para o campo elétrico ser nulo dentro da região 2 (condutor) as cargas nas placas superior e inferior devem induzir densidades superficiais de carga $\pm\sigma = \pm Q/A$ na placa do meio, conforme a figura ($\pm\sigma_i$ são as densidades induzidas no dielétrico que usaremos no item (c)).



Na região 1 o campo é devido à distribuição $+\sigma$ na placa superior e da $-\sigma$ na placa do meio.

$$\vec{E}_1 = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\widehat{k} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\widehat{k} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}\widehat{k} = -\frac{Q}{\epsilon_0\, A}\widehat{k}.$$

Na região 2, dentro do condutor, o campo é nulo.

$$\vec{E}_2 = \vec{0}.$$

Na região 3 sem o dielétrico $\vec{E}_3$ seria igual a $\vec{E}_1$. O efeito do dielétrico consiste em reduzir $\vec{E}_1$ de um fator κ.

$$\vec{E}_3 = -\frac{\sigma}{\kappa\,\epsilon_0}\widehat{k} = -\frac{Q}{\kappa\,\epsilon_0\, A}\widehat{k}.$$

(b) A capacitância é

$$C = \frac{|Q|}{|V|} = \frac{\sigma A}{E_1 d + E_3 d} = \frac{\sigma A}{\sigma d/\epsilon_0 + \sigma d/\kappa\epsilon_0} = \frac{\epsilon_0\, A}{d}\frac{\kappa}{\kappa+1}.$$

(c) O campo E_3 na região 3 é igual a E_1/κ (veja o item (a)). Além disto, E_3 é devido à distribuição $+\sigma$ na placa do meio, da $-\sigma$ na placa inferior e das distribuições $\pm\sigma_i$ no dielétrico (veja a figura). Assim, podemos escrever E_3 de duas maneiras diferente.

$$\left.\begin{aligned} E_3 &= \frac{\sigma}{\kappa\,\epsilon_0} \\ E_3 &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_i}{\epsilon_0} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \sigma_i = \left(\frac{\kappa-1}{\kappa}\right)\sigma = \left(\frac{\kappa-1}{\kappa}\right)\frac{Q}{A}.$$

Formulário

$$\vec{F}=\frac{qq'(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3},\quad \vec{F}=q\vec{E},\quad \vec{E}=\frac{q(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3},\quad \vec{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{r^3}\vec{r},\quad \Phi_E=\int\vec{E}\cdot d\vec{A},$$

$$\oint\vec{E}\cdot d\vec{A}=\frac{q_{int}}{\epsilon_0},\quad E=\frac{\sigma}{2\epsilon_0},\quad V=\frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|},\quad V_B-V_A=-\int_A^B\vec{E}\cdot d\vec{\ell},\quad V=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{r},$$

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}V,\quad \vec{E}=-\frac{dV}{dr}\widehat{r},\quad V=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i\frac{q_i}{r_i},\quad U=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i<j}\frac{q_i\,q_j}{r_{ij}},\quad C=Q/V,$$

$$C_{eq}=C_1+C_2+\ldots,\quad \frac{1}{C_{eq}}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\ldots,\quad U=\frac{Q^2}{2C}=\frac{CV^2}{2}=\frac{QV}{2},\quad \frac{\epsilon}{\epsilon_0}=\kappa,\quad u=\frac{\epsilon_0}{2}E^2,$$

$$E=\frac{E_0}{\kappa},\quad u=\frac{\epsilon}{2}E^2,\quad \oint\epsilon_0\kappa\vec{E}\cdot d\vec{A}=q_{int-liv},\quad d\mathcal{V}=dxdydz,\quad d\mathcal{V}=4\pi r^2dr,$$

$$\int\cos^2(ax)dx=\frac{x}{2}+\frac{\mathrm{sen}\,(2ax)}{4a},\quad \int\mathrm{sen}^2(ax)dx=\frac{x}{2}-\frac{\mathrm{sen}\,(2ax)}{4a},$$

$$\int\mathrm{sen}\,(ax)\cos(ax)dx=\frac{\mathrm{sen}^2(ax)}{2a}.$$