

## Física III - 4323203

Escola Politécnica - 2015

GABARITO DA P2

14 de maio de 2015

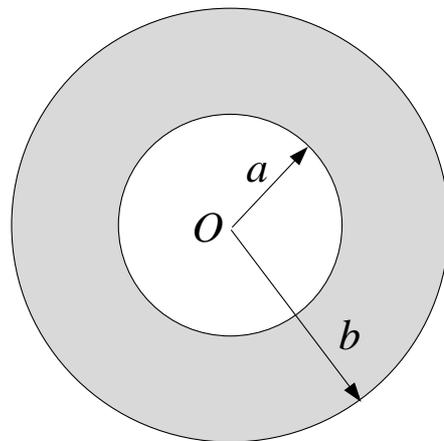
### Questão 1

Considere uma casca esférica condutora de raios interno e externo  $a$  e  $b$ , respectivamente, conforme mostrado na figura ao lado. A resistividade ôhmica cresce linearmente com a distância  $r$  até o centro  $O$ , sendo dada por

$$\rho(r) = \alpha r$$

( $\alpha$  é uma constante positiva).

- (a) (0,5 ponto) Determine a dimensão da constante  $\alpha$  no Sistema Internacional de Unidades.
- (b) (1,0 ponto) Calcule a resistência elétrica da casca esférica na direção radial.
- (c) (1,0 ponto) Uma diferença de potencial  $V$  é aplicada entre as duas superfícies. Supondo que o potencial maior seja o da superfície interna, calcule a corrente  $I$  e a densidade de corrente  $\vec{J}(r)$ .



**Solução da questão 1**

- (a) A resistividade possui dimensão de resistência multiplicada por unidade de comprimento. Portanto, no SI,  $\alpha$  deve ter dimensão de Ohm.
- (b) Utilizando a expressão para a resistência de uma camada infinitesimal de espessura  $dr$  e área  $4\pi r^2$ , teremos

$$dR = \rho(r) \frac{dr}{4\pi r^2} = \frac{\alpha}{4\pi} \frac{dr}{r}$$

Integrando entre  $r = a$  e  $r = 2a$ , teremos

$$R = \frac{\alpha}{4\pi} \int_a^{2a} \frac{dr}{r} = \frac{\alpha \log(2a/a)}{4\pi}$$

- (c) A diferença de potencial  $V$  produz uma corrente  $I$  dada por

$$I = \frac{V}{R} = \frac{4\pi V}{\alpha \log(2a/a)}$$

Essa corrente vai da superfície interna (maior potencial) para a externa (menor potencial). Por conservação de carga, devemos ter  $I = \oint \vec{J} \cdot d\vec{A}$ , para qualquer superfície fechada passando por pontos entre  $a$  e  $2a$ . Usando a simetria radial da densidade de corrente, podemos considerar uma superfície esférica de raio  $r$  ( $a \leq r \leq 2a$ ) de modo que

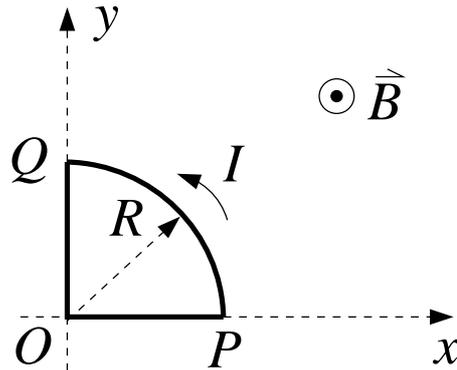
$$\oint \vec{J}(r) \cdot d\vec{A} = (J(r)\hat{r}) \cdot (4\pi r^2\hat{r}) = J(r)4\pi r^2 = I = \frac{4\pi V}{\alpha \log(2a/a)}$$

Logo,

$$\vec{J}(r) = \frac{V}{\alpha \log(2a/a)r^2} \hat{r}.$$

## Questão 2

Na figura abaixo o campo magnético  $\vec{B} = B\vec{k}$  é uniforme e perpendicular ao plano da figura, apontando para fora. A espira é formada por um quarto de círculo de raio  $R$  e por dois segmentos retilíneos  $\overline{OP}$  e  $\overline{QO}$  de comprimento  $R$ , conforme a figura. Pela espira circula uma corrente  $I$  no sentido anti-horário.



- (a) (1,0 ponto) Partindo da equação  $d\vec{F} = Id\vec{\ell} \times \vec{B}$ , calcule a força magnética resultante sobre os segmentos retos da espira.
- (b) (1,0 ponto) Partindo da equação  $d\vec{F} = Id\vec{\ell} \times \vec{B}$ , calcule a força magnética resultante sobre o segmento circular da espira.
- (c) (0,5 ponto) Calcule o torque que age sobre a espira.

**Solução da questão 2**

(a) No trecho reto  $\overline{OP}$ ,  $d\vec{\ell} = dx \hat{i}$

$$\vec{F}_1 = I \left( \int_O^P d\vec{\ell} \right) \times \vec{B} = I R \hat{i} \times \vec{B} = -IBR \hat{j}.$$

No trecho reto  $\overline{QO}$ ,  $d\vec{\ell} = -dy \hat{j}$

$$\vec{F}_2 = I \left( \int_Q^O d\vec{\ell} \right) \times \vec{B} = -I R \hat{j} \times \vec{B} = -IBR \hat{i}.$$

(b) No trecho circular,  $d\vec{\ell} = dl \hat{r}$ . Assim,  $d\vec{\ell} \times B\vec{k} = Bdl \hat{r}$ , onde  $\hat{r} = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}$ .

$$\vec{F}_3 = I \int_P^Q d\vec{\ell} \times \vec{B} = IB \int_P^Q \hat{r} dl = IB \int_0^{\pi/2} (\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}) R d\theta = IBR(\hat{i} + \hat{j}).$$

Solução alternativa:

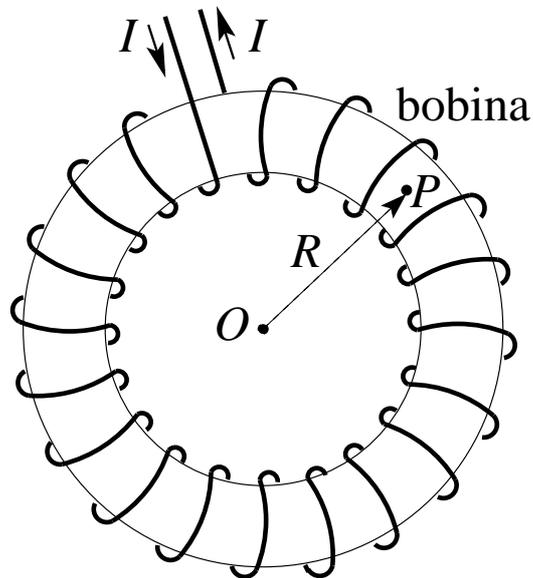
$$\vec{F}_3 = I \left( \int_P^Q d\vec{\ell} \right) \times \vec{B} = I (-R \hat{i} + R \hat{j}) \times \vec{B} = IBR(\hat{i} + \hat{j}).$$

(c) O torque pode ser calculado com a equação

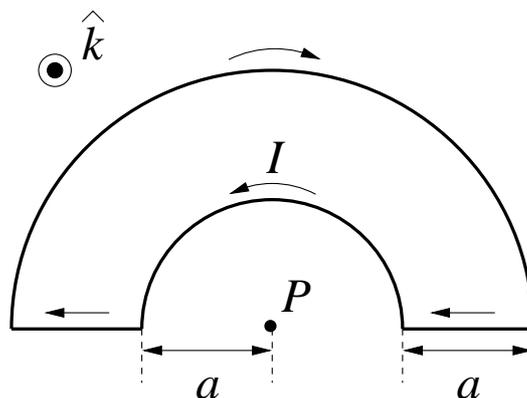
$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} = \left( I \frac{\pi R^2}{4} \hat{k} \right) \times (B \hat{k}) = \vec{0}.$$

### Questão 3

- (I) A figura abaixo mostra uma bobina toroidal com  $N$  espiras bem cerradas. Uma corrente  $I$  percorre o enrolamento desta bobina.



- (a) (1.0 ponto) Calcule o módulo do campo magnético  $B$  em um ponto  $P$  no interior da bobina, a uma distância  $R$  do seu eixo, quando a bobina é constituída só pelo enrolamento (núcleo de ar).
- (b) (0.5 ponto) Calcule a relação entre as correntes  $I_{\text{ar}}$  e  $I_{\text{Fe}}$  na bobina com núcleo de ar e com núcleo de ferro ( $K_m = 1400$ ), respectivamente que produzem o mesmo campo magnético  $B$  no ponto  $P$ .
- (II) A figura abaixo mostra um circuito formado por dois trechos semi-circulares de raios  $a$  e  $2a$  e dois trechos retos. Uma corrente  $I$  percorre o circuito no sentido anti-horário, como mostrado na figura. Calcule o campo magnético no ponto  $P$ .



**Solução da questão 3**

(I) Bobina toroidal

(a) Usando o círculo de raio  $R$ , coaxial com o fio, e a lei de Ampère obtemos

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{total}$$

Como  $\vec{B}$  é paralelo a  $d\vec{\ell}$  e  $B = B(r)$  e  $I_{total} = NI$  podemos escrever

$$\oint_C B d\ell = B(R) \oint_C d\ell = B2\pi R = \mu_0 NI \implies B(R) = \frac{\mu_0 NI}{2\pi R}$$

(b) Na presença do material magnético o campo no vácuo aumenta por um fator  $K_m$ . Para o ar  $K_m \approx 1$ . Usando o resultado do item (a) podemos escrever

$$B_{\text{Fe}}(R) = \frac{\mu_0 K_m NI_{\text{Fe}}}{2\pi R}; \quad B_{\text{ar}}(R) = \frac{\mu_0 NI_{\text{ar}}}{2\pi R}.$$

Igualando os campos magnéticos obtemos

$$\frac{I_{\text{ar}}}{I_{\text{Fe}}} = K_m = 1400.$$

(II) Campo magnético dos fios. Usando a lei de Biot-Savart vemos que os segmentos retos não contribuem para o campo em  $P$  uma vez que para estes trechos  $d\vec{\ell} \times \hat{r} = 0$ .

A contribuição de um trecho circular de raio  $R$  é (usando  $d\vec{\ell} = \pm R d\theta \hat{\theta}$ )

$$d\vec{B} = \pm \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\theta}{R} (\hat{\theta} \times \hat{r}) = \pm \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\theta}{R} \hat{k}.$$

A contribuição dos arcos de raios  $R = a$  e  $R = 2a$  será, respectivamente

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \hat{k} \int_0^\pi d\theta = \frac{\mu_0 I}{4a} \hat{k}$$

e

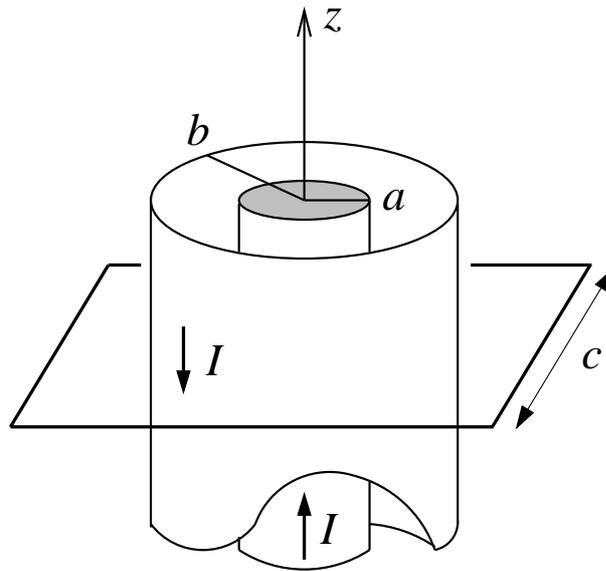
$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{8\pi a} \hat{k} \int_0^\pi d\theta = -\frac{\mu_0 I}{8a} \hat{k}.$$

Usando o princípio de superposição, teremos

$$\vec{B}_P = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{4a} \hat{k}$$

### Questão 4

Um fio condutor cilíndrico muito longo e de seção reta de raio  $a$  está envolto por uma casca cilíndrica condutora fina de raio  $b$ , formando um *cabo coaxial*. Pelo fio passa uma corrente  $I$ , na direção positiva do eixo  $z$ , uniformemente distribuída através de sua seção reta. Na casca cilíndrica passa uma corrente total  $I$ , na direção negativa do eixo  $z$ , conforme a figura.



- (a) (1,0 ponto) Calcule o campo magnético nos pontos onde  $0 < r < a$  ( $r$  é a distância do ponto até o eixo  $z$ ).
- (b) (1,0 ponto) Calcule o campo magnético na região  $a < r < b$ .
- (c) (0,5 ponto) Calcule a integral  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$  ao longo do quadrado de lado  $c > b$  coaxial com o eixo  $z$ , conforme a figura.

**Solução da questão 4**

A lei de Ampère

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I(r)$$

e a simetria cilíndrica do problema ( $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(r)2\pi r$ ) resultam em

$$B(r) = \mu_0 \frac{I(r)}{2\pi r} \quad \text{e} \quad \vec{B} = \mu_0 \frac{I(r)}{2\pi r} \hat{\phi}.$$

(a) Para  $0 < r < a$ ,

$$I(r) = \int \vec{J} \cdot d\vec{A} = \pi r^2 J = \pi r^2 \frac{I}{\pi a^2} = \frac{I r^2}{a^2}.$$

Logo

$$\vec{B}(0 < r < a) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \hat{\phi}$$

(b) Para  $a < r < b$ ,  $I(r) = I$ . Logo

$$\vec{B}(a < r < b) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi}$$

(c) Usando a lei de Ampère no percurso quadrado obtemos

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{total} = \mu_0 (I - I) = 0.$$

### Formulário

$$I = \frac{dQ}{dt} = n|q|v_d A, \quad \vec{J} = n|q|\vec{v}_d, \quad dR = \rho \frac{d\ell}{A}, \quad V = RI, \quad V = \mathcal{E} - Ir, \quad P = VI,$$

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}, \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0, \quad d\vec{F} = Id\vec{\ell} \times \vec{B}, \quad \vec{\mu} = I\vec{A},$$

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}, \quad U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}, \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2}, \quad \frac{F}{\ell} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}, \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{int},$$

$$\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}, \quad \vec{B}_m = \mu_0 \vec{M}, \quad \vec{M} = \chi_m \vec{H} = \chi_m \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}, \quad \vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_m,$$

$$\vec{B} = \mu_0(1 + \chi_m) \vec{H} = (1 + \chi_m) \vec{B}_0, \quad \mu = K_m \mu_0 = (1 + \chi_m) \mu_0,$$