Física III - 4323203

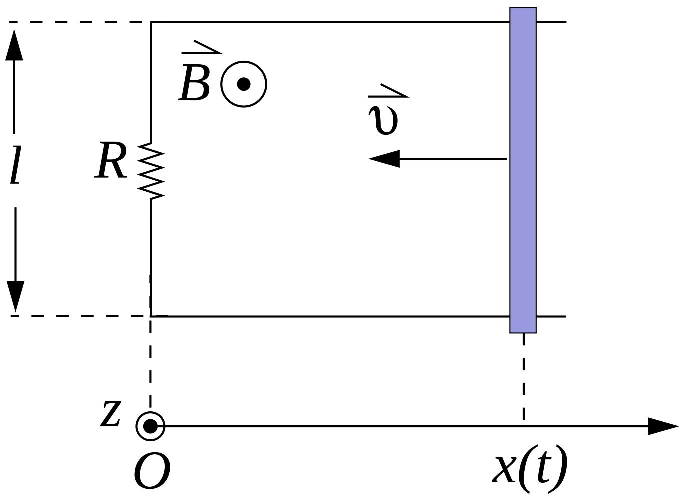
Escola Politécnica - 2015

GABARITO DA P3

25 de junho de 2015

Questão 1

Uma barra condutora é movida com velocidade <u>constante</u> $-v\,\hat{\imath}$, sobre dois fios condutores separados por uma distância l. A coordenada da barra no instante $t = 0$ é $x(0) = x_0$. Um resistor de resistência R em $x = 0$ está conectado às extremidades dos dois fios, formando o circuito fechado mostrado na figura. Um campo magnético uniforme e <u>crescente</u> com o tempo $\vec{B} = \beta\, t\, \hat{k}$, onde $\beta > 0$, está presente na região. Nas perguntas abaixo considere o tempo t apenas no intervalo $0 \leq t < x_0/v$.



(a) (1,0 ponto) Determine a força eletromotriz induzida no circuito como função do tempo t.

(b) (1,0 ponto) Calcule a corrente induzida no circuito e determine o instante de tempo no qual ela se anula.

(c) (0,5 ponto) Determine o sentido da corrente (horário ou anti-horário) como função do tempo t.

Solução da questão 1

(a) O fluxo magnético $\Phi_m = \vec{B} \cdot \vec{A}$. Percorrendo o circuito no sentido anti-horário a normal da área está na direção $\widehat{k}$ e $\Phi_m = B(t)\, l\, x(t)$.

A força eletromotriz $\mathcal{E}$ no circuito devido à variação do fluxo magnético é dada por

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(B(t)\, l\, x(t)\right) = -\frac{dB}{dt}\, l\, x - B\, l\, \frac{dx}{dt}.$$

A coordenada $x(t)$ da barra é calculada através de

$$\frac{dx}{dt} = -v, \quad x(0) = x_0 \Longrightarrow x(t) = x_0 - vt.$$

A área se anula em $t = x_0/v$. Portanto, a solução abaixo vale para $0 \leq t < x_0/v$.

$$\mathcal{E} = -\beta l(x_0 - vt) + \beta t l v = -\beta l x_0 + 2\beta t l v = -\beta l(x_0 - 2vt).$$

(b) A corrente é dada por

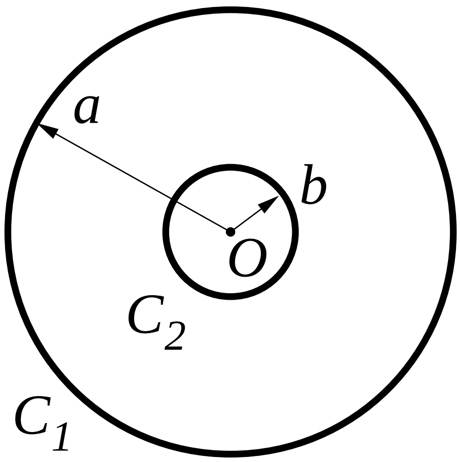
$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{\beta l}{R}(x_0 - 2vt).$$

Ela vai se anular quando $t = \dfrac{x_0}{2v}$.

(c) Para $0 \leq t < x_0/2v$, $\mathcal{E} < 0$ e o sentido da corrente é horário. Para $x_0/2v < t < x_0/v$, $\mathcal{E} > 0$ e o sentido da corrente é anti-horário.

Questão 2

Um anel condutor C_1 de raio a está no plano xy e centrado na origem O de um sistema de coordenadas. Outro anel condutor C_2, concêntrico a C_1 possui raio $b << a$, conforme a figura.



(a) (1,5 ponto) Calcule a indutância mútua entre os dois anéis. Justifique as aproximações feitas.

(b) (1,0 ponto) No anel C_2 circula uma corrente $I_2 = I_0 \cos(\omega t)$. Calcule a força eletromotriz induzida no anel 1 pelo anel 2.

Dado: O campo magnético no centro de um anel de raio R por onde passa uma corrente I é $B = \dfrac{\mu_0 I}{2R}$.

$\boxed{\textbf{Solução da questão 2}}$

(a) Como $b << a$ o fluxo magnético produzido pelo anel 1 sobre o anel 2 pode ser aproximado por

$$\Phi_{21} = \int_S \vec{B} \cdot \widehat{n} dA \approx B_O \pi b^2 = \frac{\mu_0 I_1 \pi b^2}{2a}.$$

O coeficiente de indutância mútua M é

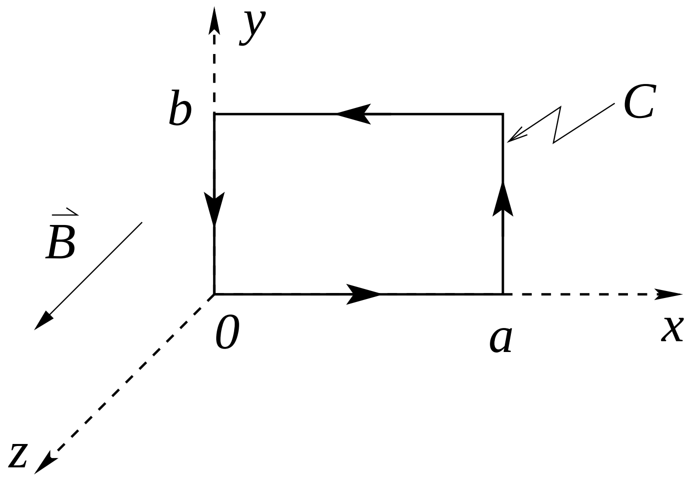
$$M = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0 \pi b^2}{2a}.$$

(b) A força eletromotriz no anel 1 produzida pela corrente $I_2 = I_0 \cos(\omega t)$ no anel 2 é

$$\mathcal{E}_1 = -M \frac{dI_2}{dt} = \frac{\mu_0 \pi b^2}{2a} I_0 \omega \,\mathrm{sen}(\omega t).$$

Questão 3

O campo elétrico na região considerada na figura é dado por $\vec{E}(y) = Ky\,\hat{\imath}$ sendo K uma constante positiva.



(a) (1,0 ponto) Calcule a integral de linha $\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$ ao longo do retângulo C de largura a e altura b, orientado como é mostrado na figura.

(b) (1,0 ponto) Além do campo elétrico na região considerada há também um campo magnético uniforme $\vec{B}(t) = B(t)\,\widehat{k}$ cuja intensidade depende do tempo. Em $t = 0$, $B(0) = B_0$. Utilizando a lei de Faraday na forma integral determine $B(t)$.

(c) (0,5 ponto) Calcule a densidade de carga na região.

Solução da questão 3

(a) Como $\vec{E}(y) = Ky\,\widehat{\imath}$, $\vec{E}\cdot d\vec{\ell} = 0$ nos trechos verticais. No trecho horizontal com $y = 0$, $\vec{E} = \vec{0}$. Portanto,

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -E(y=b)a = -Kba.$$

(b) O campo $\vec{B}$ só depende do tempo. O vetor área com a orientação adotada é $\vec{A} = ab\,\widehat{k}$. Portanto,

$$\Phi_m = \int \vec{B}\cdot d\vec{A} = \vec{B}\cdot\vec{A} = B(t)\,\widehat{k}\cdot ab\,\widehat{k} = B(t)ab.$$

Usando a lei de Faraday na forma integral obtemos

$$\left.\begin{array}{l} -\dfrac{d\Phi_m}{dt} = -ab\dfrac{dB}{dt} \\ \oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -Kba \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{dB}{dt} = K \Longrightarrow B(t) = B_0 + Kt.$$

(c) A densidade de carga é calculada com a lei de Gauss $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\epsilon_0$.

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \vec{\nabla}\cdot(Ky\,\widehat{\imath}) = 0 \Longrightarrow \rho = 0.$$

Questão 4

Uma onda eletromagnética plana senoidal polarizada na direção do eixo x propaga-se no vácuo na direção dos valores crescentes do eixo z. A frequência da onda é 10^8 s^{-1} e o valor máximo atingido pela componente magnética da onda é 10^{-8} tesla na origem do sistema de coordenadas no instante $t = 0$.

(a) (1,0 ponto) Escreva as expressões dos vetores campo elétrico e campo magnético da onda como função do tempo e posição. Todos os parâmetros da expressão devem ser numéricos.

(b) (0,5 ponto) Determine o vetor de Poynting da onda. Todos os parâmetros da expressão devem ser numéricos.

(c) (1,0 ponto) Considere agora a incidência desta onda sobre uma placa totalmente absorvedora de área $A = 4$ m^2, que se encontra em uma posição paralela ao plano xy em $z = 0$. Calcule a energia U absorvida pela placa após um intervalo de tempo de incidência igual a três vezes o período da onda. A resposta deve ser numérica.

$\boxed{\textbf{Solução da questão 4}}$

(a) O vetor campo magnético se escreve como

$$\vec{B}(z,t) = B_m \cos(kz - \omega t + \delta)\,\widehat{\jmath} = B_m \cos\left[2\pi\left(\frac{z}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) + \delta\right]\widehat{\jmath}.$$

Sua direção foi determinada através de $\vec{B} = \dfrac{\widehat{k}}{c} \times \vec{E}$, onde $\vec{E} = E(z,t)\widehat{\imath}$. Como $B(0,0) = B_m = 10^{-8}$ T a fase $\delta = 0$. O comprimento de onda $\lambda = c/f = 3$ m e o período $T = 1/f = 10^{-8}$ s. Portanto,

$$\vec{B}(z,t) = 10^{-8}\cos\left[2\pi\left(\frac{z}{3} - \frac{t}{10^{-8}}\right)\right]\widehat{\jmath} \quad \text{T}.$$

O módulo do campo elétrico $E_m = cB_m = 3$ V/m. Assim,

$$\vec{E}(z,t) = 3\cos\left[2\pi\left(\frac{z}{3} - \frac{t}{10^{-8}}\right)\right]\widehat{\imath} \quad \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

(b) O vetor de Poynting é

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} = \frac{1}{\mu_0}EB\,\widehat{k} = \frac{3}{40\pi}\cos^2\left[2\pi\left(\frac{z}{3} - \frac{t}{10^{-8}}\right)\right]\widehat{k} \quad \frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

(c) A energia absorvida pela placa é

$$U = \int_0^{3T} AS(t)dt = 3AT\frac{1}{T}\int_0^{T} S(t)dt = 3AT < S(t) >$$

$$= 12\times 10^{-8}\left\langle \frac{3}{40\pi}\cos^2\left[2\pi\left(\frac{z}{3} - \frac{t}{10^{-8}}\right)\right]\right\rangle = \frac{9}{2\pi}\times 10^{-9} \quad \text{J}.$$

Formulário

$$c = 3 \times 10^8 \ \text{m/s}, \quad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \ \text{Wb/A·m}, \quad \mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt},$$

$$\Phi^{total} = LI, \quad \Phi_{21}^{total} = M_{21}I_1 = MI_1, \quad u_m = \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad U = \frac{LI^2}{2},$$

$$u_e = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}. \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}, \ \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0, \ \mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = -\frac{d\Phi_m}{dt},$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int \vec{E} \cdot d\vec{A}, \quad I = \int \vec{J} \cdot d\vec{A}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}, \quad E = cB,$$

$$\vec{E} = E_m \cos(kx \pm \omega t + \phi)\widehat{e}_y, \quad \vec{B} = B_m \cos(kx \pm \omega t + \phi)\widehat{e}_z, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad k\,c = \omega,$$

$$f = 1/T, \quad \vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}, \quad S = uc, \quad u = u_e + u_m = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad I = < S > = \frac{E_m B_m}{2\mu_0},$$

$$< \cos^2(kx - \omega t + \phi) > = < \text{sen}^2(kx - \omega t + \phi) > = 1/2, \quad < \cos(kx - \omega t + \phi)\ \text{sen}(kx - \omega t + \phi) > = 0.$$

Para um campo vetorial $\vec{R}(x, y, z, t) = R_x(x, y, z, t)\widehat{\imath} + R_y(x, y, z, t)\widehat{\jmath} + R_z(x, y, z, t)\widehat{k}$ temos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{R} = \frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} + \frac{\partial R_z}{\partial z} \ ; \quad \vec{\nabla} \times \vec{R} = \begin{vmatrix} \widehat{\imath} & \widehat{\jmath} & \widehat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix} \ ; \quad \nabla^2 \vec{R} = \frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial z^2} \ .$$