Física III - 4323203

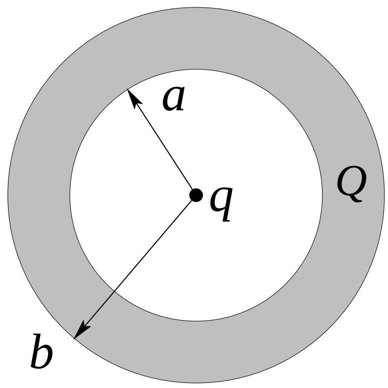
Escola Politécnica - 2015

GABARITO DA PR

23 de julho de 2015

Questão 1

Uma camada esférica condutora, com carga $Q > 0$, tem raio interno a e raio externo b. No centro da camada, na cavidade interna, há uma carga puntiforme $q > 0$, conforme a figura.



(a) (1,5 ponto) Usando a lei de Gauss e propriedades dos condutores em equilíbrio eletrostático calcule o vetor campo elétrico em todo o espaço.

(b) (1,0 ponto) A partir do campo elétrico calcule o potencial elétrico na região 1 ($r \geq b$), na região 2 ($a \leq r \leq b$) e na região 3 ($0 < r \leq a$). Defina o potencial no infinito igual a zero.

Solução da questão 1

(a) No equilíbrio o campo no interior do condutor é zero. Por simetria, em todo o espaço $\vec{E} = E(r)\hat{r}$. Usando uma superfície esférica S de raio r, concêntrica com a camada, podemos escrever

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(r) 4\pi r^2 = \frac{q_{in}}{\epsilon_0},$$

onde q_{in} é a carga no interior da superfície S. Assim,

$$\boxed{\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\hat{r} \quad \text{para} \quad 0 < r < a \\ 0 \quad \text{para} \quad a < r < b \\ \dfrac{q+Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\hat{r} \quad \text{para} \quad r > b. \end{cases}}$$

(b) O potencial pode ser calculado a partir da expressão

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\int_{r_A}^{r_B} E(r) dr.$$

Região 1 ($r \geq b$): colocamos $V_1(\infty) = 0$. Assim,

$$V_1(r) = -\int_\infty^r \frac{q+Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\, dr = \boxed{\frac{q+Q}{4\pi\epsilon_0 r}}.$$

Região 2 ($a \leq r \leq b$): o potencial é constante. Como o potencial é contínuo

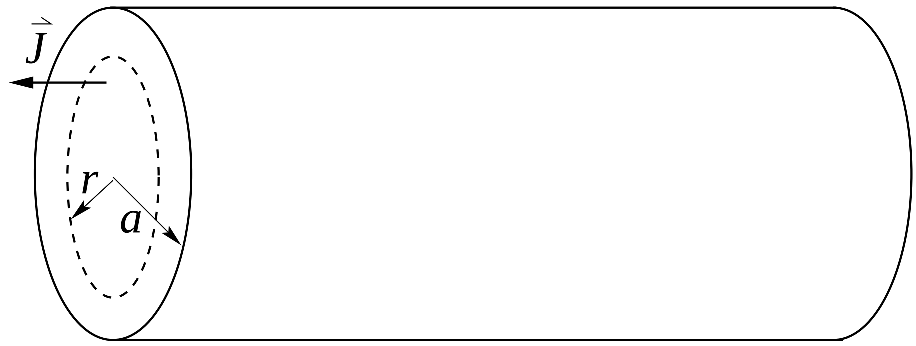
$$V_2(r) = V_1(b) = \boxed{\frac{q+Q}{4\pi\epsilon_0 b}}.$$

Região 3 ($0 < r \leq a$): por continuidade $V_3(a) = V_2(a) = \dfrac{q+Q}{4\pi\epsilon_0 b}$.

$$V_3(r) - V_3(a) = -\int_a^r E(r) dr = -\int_a^r \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\, dr \Longrightarrow \boxed{V_3(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{q+Q}{4\pi\epsilon_0 b}}.$$

Questão 2

Em um condutor cilíndrico muito longo, maciço, de raio a passa uma corrente cuja densidade J varia linearmente com a distância ao eixo do cilindro segundo a expressão $J = J_0\, r/a$, onde J_0 é uma constante.



(a) (1,0 ponto) Calcule a corrente $I(r)$ através do disco de raio r mostrado na figura.

(b) (1,0 ponto) Calcule o vetor $\vec{B}$ para $r < a$.

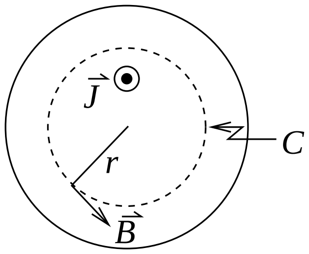
(c) (0,5 ponto) Calcule o vetor $\vec{B}$ para $r > a$.

Solução da questão 2

(a) A corrente $I(r)$ é dada por

$$I(r) = \int \vec{J} \cdot d\vec{A} = \int_0^r (J_0 \frac{r}{a})(2\pi r dr) = \boxed{\frac{2\pi J_0 r^3}{3a}}.$$

(b) O campo tem simetria cilíndrica. Usando a lei de Ampère com o percurso pontilhado C da figura obtemos para $r < a$:



$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B(r)2\pi r = \mu_0 I(r)\,,$$

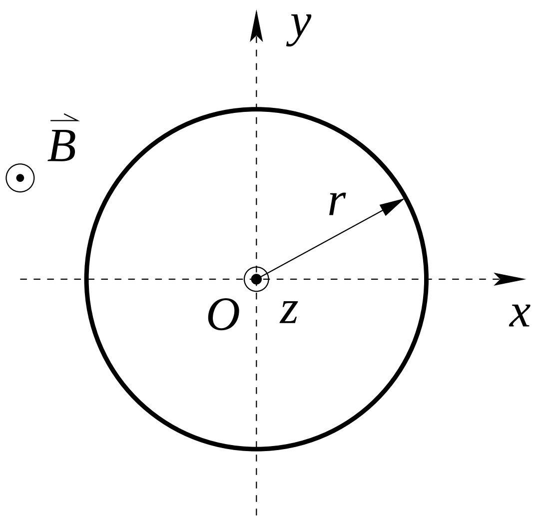
$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 J_0 r^2}{3a} \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 J_0 r^2}{3a}\widehat{\theta}}$$

(c) Se $r > a$, a corrente que atravessa uma superfície limitada por C é $I(a)$.

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B(r)2\pi r = \mu_0 I(a) \Rightarrow B = \frac{\mu_0 J_0 a^2}{3r} \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 J_0 a^2}{3r}\widehat{\theta}}$$

Questão 3

O anel de resistência elétrica R contido no plano xy é constituído por um condutor elástico o que possibilita variações de seu raio r. Durante o intervalo de tempo $0 \leq t < r_0/\alpha$ o raio do anel diminui segundo a equação $r(t) = r_0 - \alpha t$, onde $\alpha > 0$ é constante. O campo magnético $\vec{B} = B_0\,\widehat{k}$ presente na região é uniforme e ortogonal ao plano xy. Nas perguntas abaixo considere o tempo t apenas no intervalo $0 \leq t < r_0/\alpha$.



(a) (1,0 ponto) Determine a força eletromotriz induzida no anel em função de t.

(b) (0,5 ponto) Calcule a corrente induzida no anel e determine o seu sentido (horário ou anti-horário).

(c) (1,0 ponto) Calcule o campo magnético produzido pela corrente induzida no centro O do anel. Se você não resolveu o item (b) deixe sua resposta em função da corrente induzida I_{ind}.

Solução da questão 3

(a) O fluxo magnético $\Phi_m = \vec{B} \cdot \vec{A}$. Percorrendo o anel no sentido anti-horário a normal da área está na direção $\widehat{k}$ e $\Phi_m = B_0 \pi r^2$.

A <u>força eletromotriz</u> $\mathcal{E}$ no anel devido à variação do fluxo magnético é dada por

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(B_0 \pi r(t)^2\right) = -B_0 \pi 2r \frac{dr}{dt} = \boxed{B_0 \pi 2(r_0 - \alpha t)\alpha}.$$

(b) A <u>corrente induzida</u> é dada por

$$I_{ind} = \frac{\mathcal{E}}{R} = \boxed{\frac{2\pi\alpha B_0}{R}(r_0 - \alpha t)}.$$

Como $\mathcal{E} > 0$ o sentido da corrente é <u>anti-horário</u>.

<u>Solução alternativa</u>: usando a lei de Lenz, concluimos que a corrente induzida deve produzir um campo magnético no sentido do campo $\vec{B}$ para se opor à diminuição do fluxo. Portanto, o sentido da corrente deve ser <u>anti-horário</u>.

(c) O campo em O pode ser calculado através da lei de Biot-Savart:

$$\vec{B}_O = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{\ell} \times \widehat{r}}{r^2}.$$

Usando $d\vec{\ell} \times \widehat{r} = d\ell \, \widehat{k} = r(t) d\theta \, \widehat{k}$ e $r = r(t)$ podemos escrever

$$\vec{B}_O = \frac{\mu_0 I_{ind}}{4\pi r(t)} \int_0^{2\pi} d\theta \, \widehat{k} = \frac{\mu_0 I_{ind}}{2r(t)} \, \widehat{k} = \boxed{\frac{\pi\alpha B_0 \mu_0}{R} \, \widehat{k}}.$$

Questão 4

Uma onda eletromagnética plana monocromática que se propaga no vácuo possui um campo elétrico descrito pela expressão $\vec{E}(z,t) = E_0 \operatorname{sen}[2\pi(az + bt)]\hat{\imath}$ onde a e b são constantes positivas.

(a) (0,5 ponto) Determine a direção e o sentido de propagação da onda. Calcule o comprimento de onda e a frequência da onda em função das constantes a e b.

(b) (0,5 ponto) Qual relação dever haver entre a e b para que $\vec{E}(z,t)$ satisfaça a equação de onda da luz se propagando no vácuo?

(c) (0,5 ponto) Determine o vetor $\vec{B}$ em função de E_0, a, b e da velocidade da luz no vácuo c.

(d) (1,0 ponto) Calcule o vetor de Poynting instantâneo e a densidade de energia média desta onda.

Solução da questão 4

(a) A onda se propaga na direção do eixo z no sentido decrescente. O campo elétrico de uma onda plana monocromática que se propaga nesta direção e sentido tem a forma $\vec{E}(z,t) = E_0 \operatorname{sen}(kz + \omega t)\widehat{\imath}$. Comparando com o campo dado obtemos

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi a \Longrightarrow \boxed{\lambda = a^{-1}}, \qquad \omega = 2\pi f = 2\pi b \Longrightarrow \boxed{f = b}.$$

(b) A equação de uma onda eletromagnética se propagando no vácuo é

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Substituindo a expressão de $\vec{E}$ na equação acima obtemos

$$-4\pi^2 a^2 E_0 \operatorname{sen}[2\pi(az + bt)]\widehat{\imath} = -\frac{4\pi^2 b^2}{c^2} E_0 \operatorname{sen}[2\pi(az + bt)]\widehat{\imath} \Longrightarrow \boxed{a = \frac{b}{c}}.$$

(c) O campo $\vec{B}$ é

$$\vec{B}(z,t) = -\frac{\widehat{k}}{c} \times \vec{E}(z,t) = \boxed{-\frac{E_0}{c}\operatorname{sen}[2\pi(az + bt)]\widehat{\jmath}}.$$

(d) O vetor de Poynting no instante t é

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B} = \boxed{-\frac{E_0^2}{\mu_0 c}\operatorname{sen}^2[2\pi(az + bt)]\widehat{k}}.$$

A densidade de energia média pode ser obtida através do valor médio do vetor de Poynting: $u = \langle S \rangle / c$. Assim,

$$\boxed{u = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c^2}}.$$

Formulário

$$\vec{F} = q\vec{E}, \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r^2}\hat{r}, \quad V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{\ell}, \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V,$$

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B}, \quad \Phi_B = \int \vec{B}\cdot d\vec{A}, \quad d\vec{F} = Id\vec{\ell}\times\vec{B}, \quad \vec{\mu} = I\vec{A}, \quad \vec{\tau} = \vec{\mu}\times\vec{B}, \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell}\times\vec{r}}{r^3},$$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{int}, \quad \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}, \quad \oint \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0, \; \mathcal{E} = \oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\cdot d\vec{A} = -\frac{d\Phi_m}{dt},$$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0\epsilon_0\frac{d}{dt}\int \vec{E}\cdot d\vec{A}, \quad I = \int \vec{J}\cdot d\vec{A}, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}, \quad \nabla^2\vec{E} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}, \quad \nabla^2\vec{B} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}, \quad E = cB,$$

$$\vec{E} = E_m\cos(kx \pm \omega t + \phi)\hat{e}_y, \quad \vec{B} = B_m\cos(kx \pm \omega t + \phi)\hat{e}_z, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad k\,c = \omega,$$

$$f = 1/T, \quad \vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}, \quad S = uc, \quad u = u_e + u_m = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad I = \langle S \rangle = \frac{E_m B_m}{2\mu_0},$$

Para um campo vetorial $\vec{R}(x,y,z,t) = R_x(x,y,z,t)\hat{\imath} + R_y(x,y,z,t)\hat{\jmath} + R_z(x,y,z,t)\hat{k}$ temos

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{R} = \frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} + \frac{\partial R_z}{\partial z} \; ; \quad \vec{\nabla}\times\vec{R} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix} \; ; \quad \nabla^2\vec{R} = \frac{\partial^2\vec{R}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\vec{R}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\vec{R}}{\partial z^2} \, ,$$