Física III - 4323203

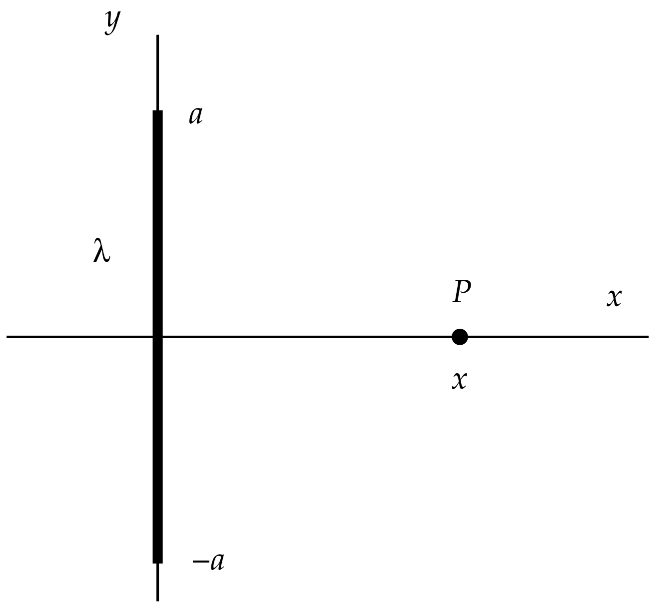
Escola Politécnica - 2015

GABARITO DA PS

2 de julho de 2015

Questão 1

Um fio sobre o eixo y tem comprimento $2a$ e densidade de carga constante λ.



(a) (1,5 pontos) Calcule o potencial elétrico num ponto $P = (x, 0)$ ao longo do eixo x passando pelo centro do fio.

(b) (1,0 ponto) Calcule o <u>vetor</u> campo elétrico no mesmo ponto $P = (x, 0)$.

Solução da questão 1

(a) Potencial elétrico

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{-a}^{a} \frac{\lambda dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left[\ln\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right]_{-a}^{a}$$

$$= \boxed{\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{\sqrt{a^2+x^2}+a}{\sqrt{a^2+x^2}-a}\right)}$$

(b) Campo elétrico

Devido à simetria do sistema $E_y = 0$.

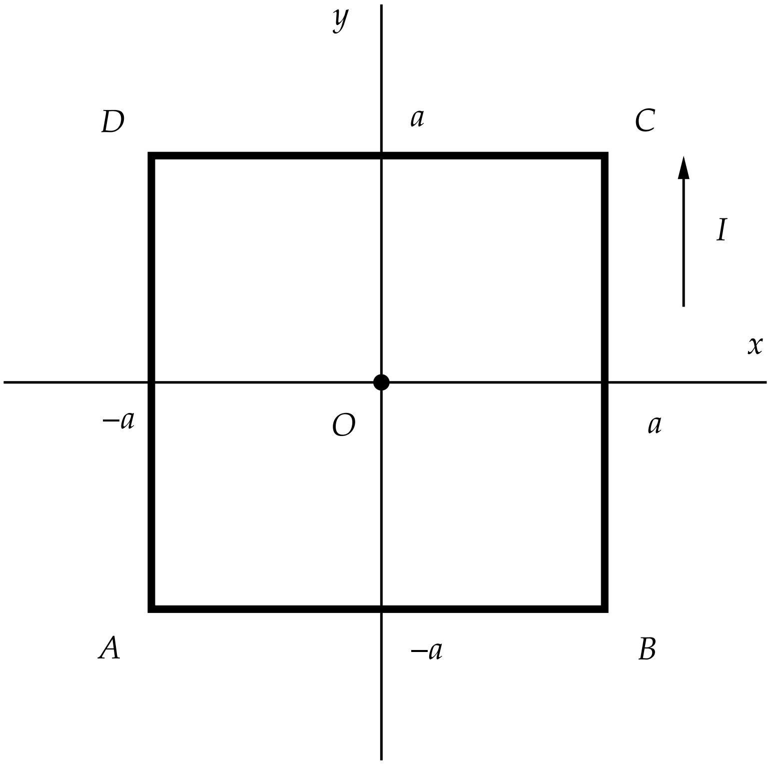
$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{a}{x\sqrt{x^2+a^2}}$$

Portanto,

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{a}{x\sqrt{x^2+a^2}}\widehat{\imath}}$$

Questão 2

Uma espira quadrada de lado $2a$ está no plano xy com o seu centro na origem das coordenadas, conforme a figura. Uma corrente I circula pela espira no sentido indicado.



(a) (1,5 pontos) Calcule o campo magnético produzido pelo lado AB da espira na origem O. Qual é o campo produzido por toda a espira no mesmo ponto O?

(b) (1,0 ponto) Calcule o torque exercido sobre a espira por um campo magnético externo $\vec{B} = B\hat{\imath}$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 2

(a) Campo magnético produzido pelo lado AB

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-a}^{a} \frac{(dx\hat{\imath}) \times (-x\hat{\imath} + a\hat{\jmath})}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I a\hat{k}}{4\pi} \int_{-a}^{a} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 I a\hat{k}}{4\pi} \left[\frac{x}{a^2\sqrt{x^2 + a^2}} \right]_{-a}^{a} = \boxed{\frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{4\pi a}\hat{k}}$$

Campo magnético produzido pela espira no centro

$$\vec{B}_{\text{espira}} = 4\vec{B} = \boxed{\frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi a}\hat{k}}$$

(b) Momento de dipolo da espira

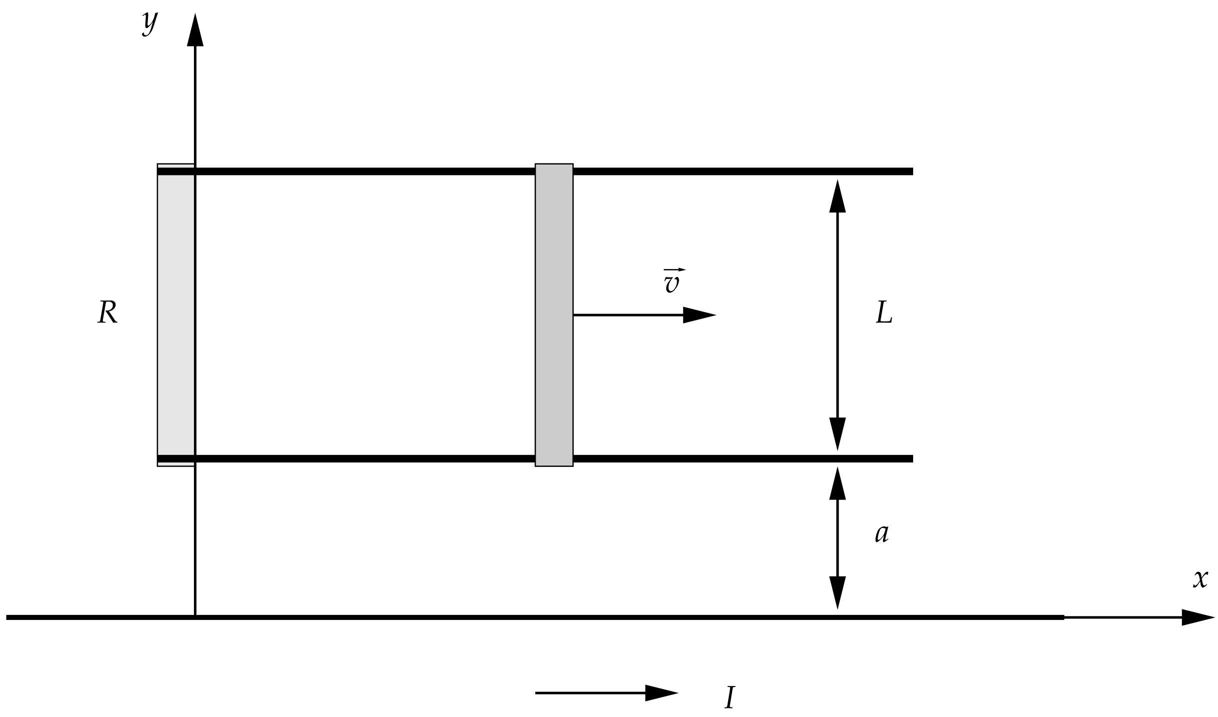
$$\vec{\mu} = IA\vec{k} = 4Ia^2\vec{k}$$

Torque devido ao campo externo

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} = (4Ia^2\vec{k}) \times (B\vec{\imath}) = \boxed{4Ia^2B\hat{\jmath}}$$

Questão 3

Uma barra condutora é deslocada com velocidade constante $\vec{v} = v\,\hat{\imath}$ sobre dois trilhos separados por uma distância L e ligados num dos extremos por uma barra fixa de resistência R, conforme a figura. Despreze a resistência elétrica da barra móvel e dos trilhos, bem como o atrito entre eles. À distância a de um dos trilhos existe um fio muito longo percorrido por uma corrente I no sentido indicado.



(a) (0,5 pontos) Determine o vetor campo magnético produzido pelo fio longo nos pontos do plano xy com $y > 0$.

(b) (1,0 ponto) Determine a corrente induzida no circuito da barra móvel (magnitude e sentido).

(c) (1,0 ponto) Determine o vetor força externa $\vec{F}_{\text{ext.}}$ que movimenta a barra.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 3

(a) Aplicando a lei de Ampère

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi r B(r) = \mu_0 I.$$

Portanto $\vec{B} = \mu_0 I \widehat{\theta}/2\pi r$. No sistema de coordenadas da figura

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi y}\widehat{k}}$$

(b) Fluxo para fora da página

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_{x=0}^{x} \int_{y=a}^{a+L} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi y}\widehat{k}\right) \cdot (\widehat{k} dx dy) = \frac{\mu_0 I x}{2\pi} \ln\left(\frac{a+L}{a}\right).$$

Força eletromotriz induzida

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln\left(\frac{a+L}{a}\right).$$

Corrente elétrica na barra

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} = \boxed{-\frac{\mu_0 I v}{2\pi R} \ln\left(\frac{a+L}{a}\right)}$$

O sinal negativo indica que o sentido é $\boxed{\text{horário}}$.

(c) Força magnética na barra

$$\begin{aligned}\vec{F} = \int d\vec{F} = \int i d\vec{l} \times \vec{B} &= \int_{a+L}^{a} i(dy\widehat{\jmath}) \times \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi y}\widehat{k}\right) \\ &= -i\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{a+L}{a}\right)\widehat{\imath} = -\left[\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{a+L}{a}\right)\right]^2 \left(\frac{v}{R}\right)\widehat{\imath}\end{aligned}$$

Força externa

$$\vec{F}_{\text{ext.}} = -\vec{F} = \boxed{\left[\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{a+L}{a}\right)\right]^2 \left(\frac{v}{R}\right)\widehat{\imath}}$$

Questão 4

Parte I

(a) (0,5 pontos) Obtenha a forma diferencial da lei de Gauss a partir da sua expressão na forma integral.

(b) (0,5 pontos) Idem, para a lei de Faraday.

Parte II

O campo elétrico de uma onda eletromagnética na região $-a/2 < z < a/2$ é dada por

$$\vec{E} = 2E_0 \cos(kz) \cos(\omega t)\, \hat{\imath}.$$

(c) (1,0 ponto) Usando a lei de Faraday determine o campo magnético.

(d) (0,5 pontos) Calcule o vetor de Poynting.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 4

(a) Lei de Gauss

$$\int_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{int.}}}{\epsilon_0} \Longrightarrow \int_S \nabla\cdot\vec{E}\cdot dV = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho dV \Longrightarrow \boxed{\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

(b) Lei de Faraday

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{A} \Longrightarrow \int_S \nabla\times\vec{E}\cdot d\vec{A} = -\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{A} \Longrightarrow \boxed{\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}}$$

(c) Campo magnético

$$-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \nabla\times\vec{E} = \widehat{\jmath}\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\widehat{\jmath}2E_0 k\,\mathrm{sen}(kz)\cos(\omega t)$$

Integrando em t,

$$\vec{B} = \boxed{\widehat{\jmath}2E_0\left(\frac{k}{\omega}\right)\mathrm{sen}(kz)\,\mathrm{sen}(\omega t)}$$

(d) Vetor de Poynting

$$\vec{S} = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0} = \boxed{E_0^2\left(\frac{k}{\mu_0\omega}\right)\mathrm{sen}(2kz)\,\mathrm{sen}(2\omega t)\widehat{k}}$$

Formulário

$$\vec{F}=q\vec{E},\quad \vec{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{r^2}\hat{r},\quad V_B-V_A=-\int_A^B\vec{E}\cdot d\vec{\ell},\quad V=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{r},\quad \vec{E}=-\vec{\nabla}V,$$

$$\vec{F}=q\vec{E}+q\vec{v}\times\vec{B},\quad \Phi_B=\int\vec{B}\cdot d\vec{A},\quad d\vec{F}=Id\vec{\ell}\times\vec{B},\quad \vec{\mu}=I\vec{A},\quad \vec{\tau}=\vec{\mu}\times\vec{B},\quad d\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell}\times\vec{r}}{r^3},$$

$$\oint\vec{B}\cdot d\vec{\ell}=\mu_0 I_{int},\quad \oint\vec{E}\cdot d\vec{A}=\frac{q_{int}}{\epsilon_0},\quad \oint\vec{B}\cdot d\vec{A}=0,\ \mathcal{E}=\oint\vec{E}\cdot d\vec{\ell}=-\frac{d}{dt}\int\vec{B}\cdot d\vec{A}=-\frac{d\Phi_m}{dt},$$

$$\oint\vec{B}\cdot d\vec{\ell}=\mu_0 I+\mu_0\epsilon_0\frac{d}{dt}\int\vec{E}\cdot d\vec{A},\quad I=\int\vec{J}\cdot d\vec{A},\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\epsilon_0},\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0,\quad \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t},\quad \nabla^2\vec{E}=\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2},\quad \nabla^2\vec{B}=\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2},\quad c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}},\quad E=cB,$$

$$\vec{E}=E_m\cos(kx\pm\omega t+\phi)\widehat{e}_y,\quad \vec{B}=B_m\cos(kx\pm\omega t+\phi)\widehat{e}_z,\quad k=\frac{2\pi}{\lambda},\quad \omega=\frac{2\pi}{T},\quad k\,c=\omega,$$

$$f=1/T,\quad \vec{S}=\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B},\quad S=uc,\quad u=u_e+u_m=\frac{\epsilon_0 E^2}{2}+\frac{B^2}{2\mu_0},\quad I=<S>=\frac{E_m B_m}{2\mu_0},$$

Para um campo vetorial $\vec{R}(x,y,z,t)=R_x(x,y,z,t)\widehat{\imath}+R_y(x,y,z,t)\widehat{\jmath}+R_z(x,y,z,t)\widehat{k}$ temos

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{R}=\frac{\partial R_x}{\partial x}+\frac{\partial R_y}{\partial y}+\frac{\partial R_z}{\partial z}\ ;\quad \vec{\nabla}\times\vec{R}=\begin{vmatrix}\widehat{\imath} & \widehat{\jmath} & \widehat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ R_x & R_y & R_z\end{vmatrix}\ ;\quad \nabla^2\vec{R}=\frac{\partial^2\vec{R}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\vec{R}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\vec{R}}{\partial z^2}\ ,$$

$$\oint_S\vec{R}\cdot d\vec{A}=\int_V\vec{\nabla}\cdot\vec{R}\,dV,\quad \oint_C\vec{R}\cdot d\vec{l}=\int_S\vec{\nabla}\times\vec{R}\cdot d\vec{A}.$$

$$\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+c^2}}=\ln\left(t+\sqrt{t^2+c^2}\right),\quad \int\frac{dt}{(t^2+c^2)^{3/2}}=\frac{t}{c^2\sqrt{t^2+c^2}}.$$