Física III - 4323203

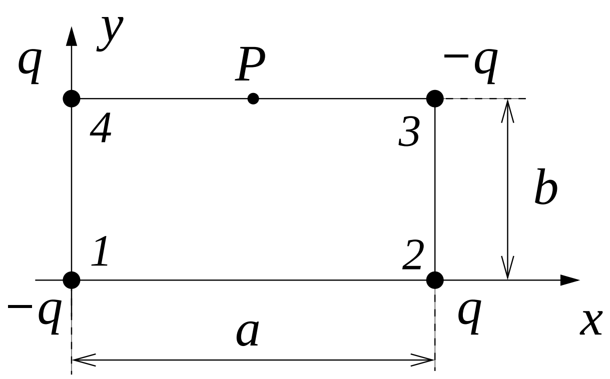
Escola Politécnica - 2016

GABARITO DA P1

31 de março de 2016

Questão 1

Quatro cargas puntiformes são colocadas nos vértices 1, 2, 3 e 4 de um retângulo, de acordo com a figura abaixo. O retângulo tem lados de comprimento a e b. Considere $q > 0$.



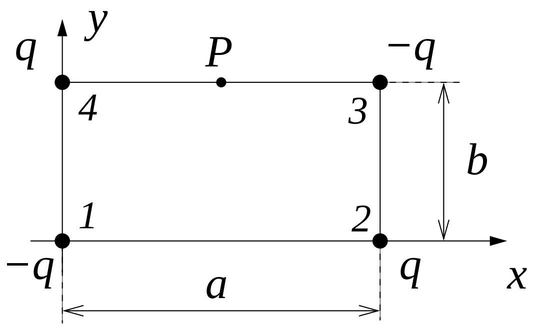
(a) (1.0 ponto) Calcule o vetor força resultante que atua na carga localizada na origem (vértice 1).

(b) (0,5 ponto) Determine o vetor campo elétrico no centro do retângulo (ponto de coordenadas $(x = a/2, y = b/2)$).

(c) (1,0 ponto) Calcule o trabalho necessário para trazer uma carga Q do infinito até o ponto P de coordenadas $(x = a/2, y = b)$.

Solução da questão 1

(a) Denotando $\vec{F}_{1j}$ a força que a carga no vértice j exerce sobre a carga que está na origem (vértice 1) podemos escrever



$$\vec{F}_{12} = k\frac{q^2}{a^2}\,\widehat{\imath},$$
$$\vec{F}_{13} = -k\frac{q^2}{(a^2+b^2)^{3/2}}\,a\,\widehat{\imath} - k\frac{q^2}{(a^2+b^2)^{3/2}}\,b\,\widehat{\jmath},$$
$$\vec{F}_{14} = k\frac{q^2}{b^2}\,\widehat{\jmath}.$$

A força total $\vec{F}_1$ sobre a carga 1 é

$$\boxed{\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14} = kq^2\left[\frac{1}{a^2} - \frac{a}{(a^2+b^2)^{3/2}}\right]\widehat{\imath} + kq^2\left[\frac{1}{b^2} - \frac{b}{(a^2+b^2)^{3/2}}\right]\widehat{\jmath}}.$$

(b) O campo gerado pela carga 1 no centro do retângulo é cancelado pelo campo da carga 3 no mesmo ponto. Analogamente, o campo gerado pela carga 2 é cancelado pelo campo da carga 4. Portanto,

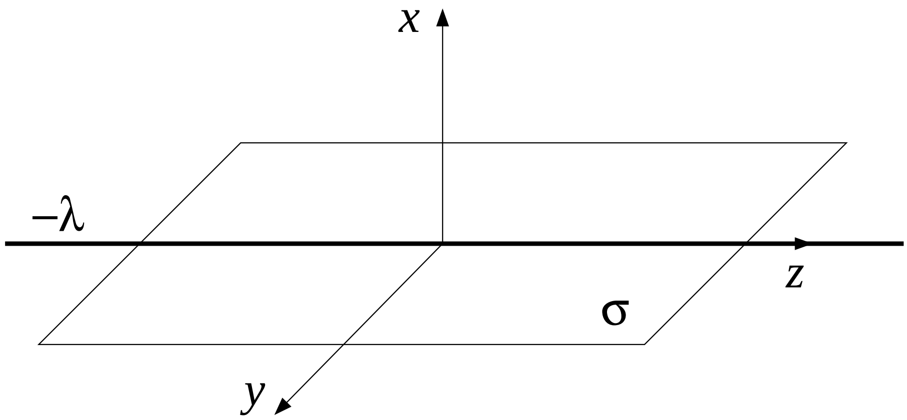
$$\boxed{\vec{E}_{centro} = \vec{0}}.$$

(c) O trabalho para trazer a carga Q do infinito até o ponto P de coordenadas $(a/2, b)$ é igual à energia potencial de Q em P.

$$\begin{aligned} W = QV(P) &= -\frac{kqQ}{r_{P1}} + \frac{kqQ}{r_{P2}} - \frac{kqQ}{r_{P3}} + \frac{kqQ}{r_{P4}} \\ &= kqQ\left[-\frac{1}{\sqrt{a^2/4+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{a^2/4+b^2}} - \frac{1}{a/2} + \frac{1}{a/2}\right] \Leftrightarrow \boxed{W = 0}. \end{aligned}$$

Questão 2

Um fio infinito, isolante, com densidade linear de carga uniforme $-\lambda < 0$, é colocado sobre uma placa infinita, isolante, com densidade superficial de carga uniforme $\sigma > 0$. Utiliza-se um sistema de coordenadas cartesianas tal que o fio está ao longo do eixo z e a placa se extende no plano yz, conforme a figura.



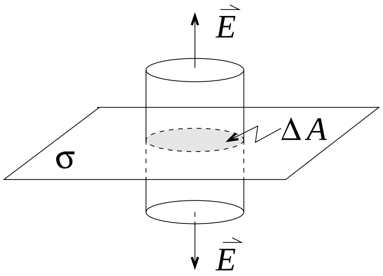
(a) (1,0 ponto) Calcule o vetor campo elétrico produzido pela placa em todo o espaço.

(b) (0,5 ponto) Calcule o vetor campo elétrico produzido pelo fio em todo o espaço.

(c) (1,0 ponto) Determine os pontos $P \equiv (x, y, z)$ do espaço onde a força que atua sobre uma partícula de carga Q é nula.

Solução da questão 2

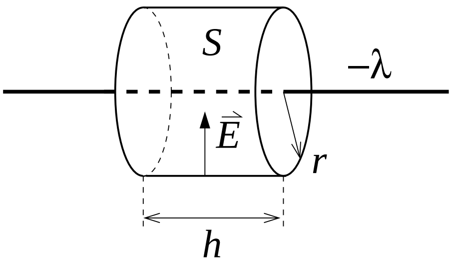
(a) Usamos a lei de Gauss com a superfície cilíndrica S mostrada na figura. Por simetria o campo $\vec{E}$ é perpendicular ao plano e só pode depender da distância até o plano.



$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = 2E\Delta A = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma\Delta A}{\epsilon_0}$$

$$\Longrightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\ ;\ \boxed{\vec{E} = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0|x|}\,\widehat{\imath}}.$$

(b) Para o fio infinito usamos a lei de Gauss com uma superfície S cilíndrica e coaxial com o fio. Por simetria o campo $\vec{E} = E(r)\widehat{r}$, onde $\widehat{r}$ é o versor radial das coordenadas cilíndricas. Os discos que fecham a superfície cilíndrica não contribuem.



$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int_{\text{área lateral}} \vec{E}\cdot d\vec{A} = -E2\pi rh$$

$$= \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{-\lambda h}{\epsilon_0} \Longrightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\ ;\ \boxed{\vec{E} = \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\,\widehat{r}}.$$

(c) O campo resultante $\vec{E}$ só se anula nas regiões do espaço onde os campos da placa e do fio têm a mesma direção. Isto só ocorre no plano xz onde $\widehat{r} = \pm\widehat{\imath}$ e $r = |x|$. Para que $\vec{E} = \vec{0}$ devemos ter

$$\frac{\sigma x}{2\epsilon_0|x|} \pm \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0|x|} = 0 \Longrightarrow x = \pm\frac{\lambda}{\pi\sigma}.$$

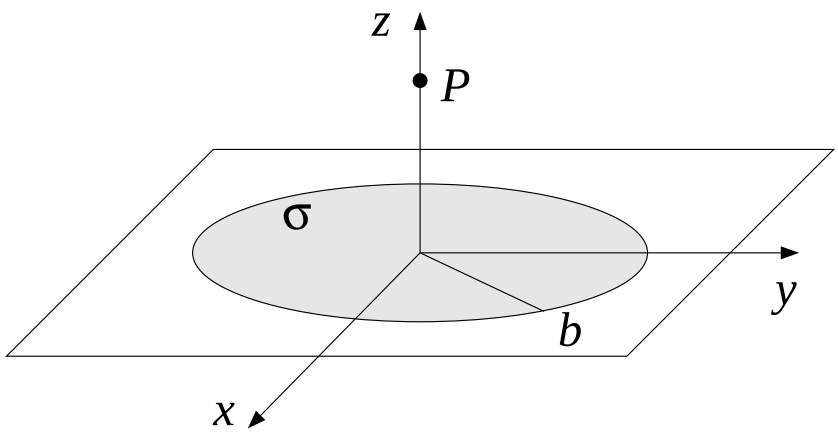
Assim, $\vec{E} = \vec{0}$ em duas retas no plano xz com pontos dados por

$$\boxed{P_1 = \left(-\frac{\lambda}{\pi\sigma}, 0, z\right) \quad \text{e} \quad P_2 = \left(\frac{\lambda}{\pi\sigma}, 0, z\right)}.$$

Questão 3

(I) (1,0 ponto) Um anel de raio a, com uma carga q uniformemente distribuida, é colocado no plano xy, com seu centro na origem de um sistema de coordenadas cartesianas. Calcule o potencial devido ao anel em um ponto qualquer P qualquer do eixo z.

(II) Um disco de raio b, no plano xy, com seu centro na origem de um sistema de coordenadas cartesianas, tem densidade superficial de carga $\sigma(r) = C/r$, onde r é a distância até o centro do disco e C é uma constante.

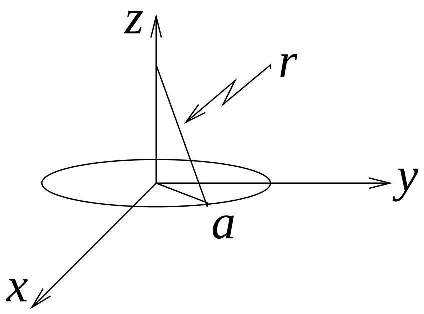


(a) (1,0 ponto) Calcule o potencial devido ao disco num ponto P do eixo z.

(b) (0,5 ponto) Calcule o vetor campo elétrico produzido pelo disco num ponto P do semi-eixo $z > 0$.

Solução da questão 3

(I) Anel uniformemente carregado



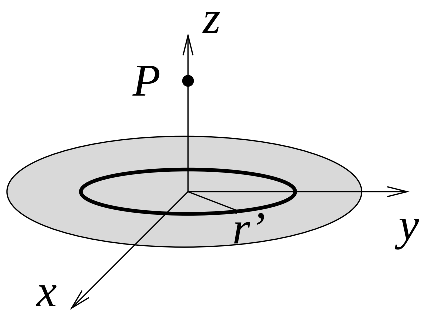
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r}$$

$$r = \sqrt{z^2 + a^2} = \text{cte.}$$

$$\boxed{V(z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{z^2+a^2}}}.$$

(II) Disco com densidade de carga $\sigma = C/r$

(a) Consideramos o disco como uma superposição de anéis concêntricos



$$V_{disco} = \int dV_{anel}$$

$$dV_{anel} = \frac{dq_{anel}}{4\pi\epsilon_0\sqrt{z^2 + r'^2}}$$

$$dq_{anel} = \sigma 2\pi r' dr' = 2\pi C dr'$$

$$V_{disco} = \frac{C}{2\epsilon_0}\int_0^b \frac{dr'}{\sqrt{z^2+r'^2}} = \frac{C}{2\epsilon_0}\ln(r' + \sqrt{z^2+r'^2})\Big|_0^b$$

$$\boxed{V_{disco} = \frac{C}{2\epsilon_0}\left[\ln(b+\sqrt{z^2+b^2}) - \ln(|z|)\right]}.$$

(b) Sobre o eixo z, por simetria, $\vec{E} = E_z\widehat{k}$ e a componente E_z para $z > 0$ é

$$E_z = -\frac{dV}{dz} = -\frac{C}{2\epsilon_0}\left[\frac{z}{(b+\sqrt{z^2+b^2})(\sqrt{z^2+b^2})} - \frac{1}{z}\right]$$

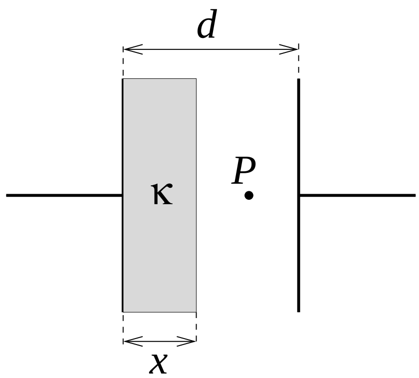
$$\Longrightarrow \boxed{\vec{E} = -\frac{C}{2\epsilon_0}\left[\frac{z}{(b+\sqrt{z^2+b^2})(\sqrt{z^2+b^2})} - \frac{1}{z}\right]\vec{k}}.$$

Questão 4

Considere um capacitor de placas planas, paralelas, com área A, separadas por uma distância d no vácuo.

(a) (1,0 ponto) Calcule a capacitância C_0 deste capacitor no vácuo em função de ϵ_0, A e d.

(b) (1,0 ponto) Calcule a nova capacitância C do capacitor se preenchermos parcialmente o espaço entre as placas com um material de constante dielétrica κ e espessura x, conforme a figura. Forneça sua resposta em função de ϵ_0, A, d, κ e x.



(c) (0,5 ponto) Calcule a densidade de energia num ponto P da região sem dielétrico após ligarmos as placas do capacitor a uma bateria com uma diferença de potencial igual a V. Forneça sua resposta em função de ϵ_0, V, d, κ e x.

Solução da questão 4

A capacitância C é definida como

$$C = \frac{Q}{|V|},$$

onde Q é a carga na placa positiva e $|V|$ é o módulo da ddp entre as placas.

(a) O campo entre as placas do capacitor no vácuo é a soma dos campos produzidos por cada uma das placas e vale $E_0 = \sigma/\epsilon_0 = Q/(\epsilon_0\, A)$ (veja o item (a) da q2). A capacitância no vácuo é

$$C_0 = \frac{Q}{E_0 d} = \frac{Q}{Qd/(\epsilon_0\, A)} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{C_0 = \frac{\epsilon_0\, A}{d}}.$$

(b) No dielétrico $E = E_0/\kappa$, onde E_0 é o campo no vácuo e κ é a constante dielétrica. Assim,

$$|V| = \frac{E_0}{\kappa}x + E_0(d-x) = \frac{Q}{\epsilon_0 A}\left(\frac{x}{\kappa} + d - x\right) = \frac{Q}{\epsilon_0 A\kappa}[x + \kappa(d-x)].$$

A capacitância C é

$$\boxed{C = \frac{Q}{|V|} = \frac{\epsilon_0 A\kappa}{x + \kappa(d-x)}}.$$

Solução alternativa: Consideramos o capacitor da figura como dois capacitores planos em série, um com constante dielétrica κ e espaçamento entre as placas igual a x e o outro sem dielétrico com espaçamento entre as placas igual a $d - x$. Neste caso, $1/C = 1/C_1 + 1/C_2$.

(c) A densidade de energia em torno do ponto P é

$$u_e = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2}, \quad \text{onde} \quad E_0 = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$$

A carga está relacionada com a capacitância através da relação $Q = CV$. Portanto,

$$u_e = \frac{\epsilon_0}{2}\frac{Q^2}{\epsilon_0^2 A^2} = \frac{\epsilon_0}{2}\frac{C^2V^2}{\epsilon_0^2 A^2} \implies \boxed{u_e = \frac{\epsilon_0\kappa^2V^2}{2[x + \kappa(d-x)]^2}}.$$

Formulário

$$\vec{F} = \frac{qq'(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3}, \qquad \vec{F} = q\vec{E}, \quad \vec{E} = \frac{q(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3}, \qquad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r^2}\hat{r},$$

$$\Phi_E = \int \vec{E}\cdot d\vec{A}, \quad \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}, \quad V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{\ell}, \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V,$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}, \quad U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i<j} \frac{q_i\, q_j}{r_{ij}}, \quad C = Q/V, \quad C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots,$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots, \quad U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} = \frac{QV}{2}, \quad u = \frac{\epsilon_0}{2}E^2 = \frac{dU}{dV}, \quad E = \frac{E_0}{\kappa},$$

$$\oint \epsilon_0\kappa\vec{E}\cdot d\vec{A} = q_{int-liv}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}), \quad \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sqrt{x^2+a^2}.$$