Física III - 4323203

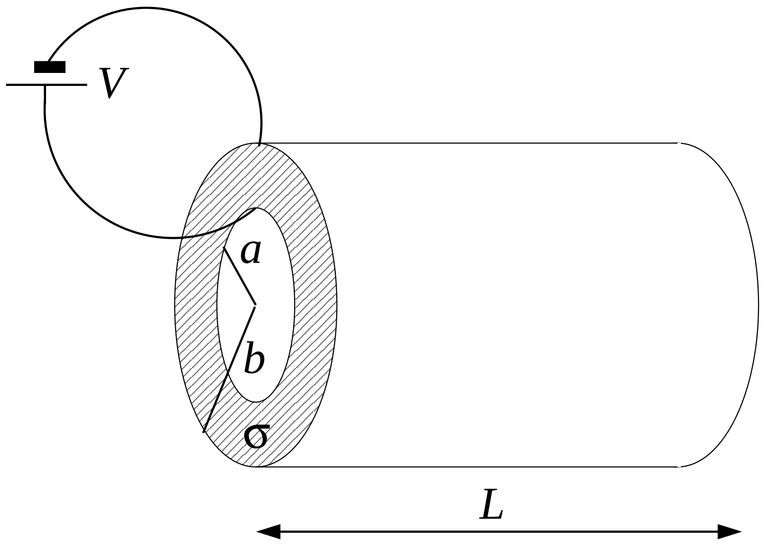
Escola Politécnica - 2016

GABARITO DA P2

12 de maio de 2016

Questão 1

Uma casca cilíndrica é feita de um material condutor de condutividade σ uniforme. As dimensões do cilindro estão indicadas na figura, onde $L >> b > a$. As superfícies interna e externa da casca com raios $r = a$ e $r = b$, onde r é a distância até o eixo da casca cilíndrica, são duas equipotenciais mantidas a uma ddp igual a V por uma bateria, conforme a figura.



(a) (0,5 ponto) Devido à simetria, a densidade de corrente é dada por $\vec{J} = J(r)\hat{r}$. Calcule $J(r)$ como função de $J(a)$, suposta conhecida.

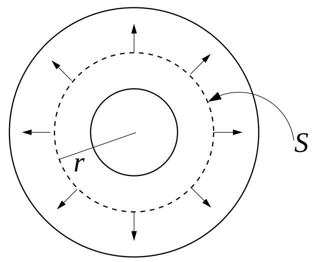
(b) (0,5 ponto) Calcule o vetor $\vec{E}(r)$ no interior da casca ($a < r < b$) como função de $J(a)$.

(c) (1,0 ponto) Calcule a resistência da casca.

(d) (0,5 ponto) Calcule $J(a)$ em função de V, σ, a e b.

Solução da questão 1

(a) Devido à conservação da carga, a corrente I através de qualquer superfície cilíndrica S de raio r dentro da casca é a mesma.



$$I = J(a)2\pi aL = J(r)2\pi rL$$

$$\Longrightarrow \boxed{J(r) = J(a)\frac{a}{r}}$$

(b) A lei de Ohm fornece

$$\vec{E} = \frac{1}{\sigma}\vec{J} = \frac{1}{\sigma}J(r)\,\widehat{r} = \boxed{\frac{J(a)}{\sigma}\frac{a}{r}\,\widehat{r}}.$$

(c) Cálculo da resistência:

$$\Delta V = -\int_a^b E(r)dr = -\frac{J(a)a}{\sigma}\int_a^b \frac{1}{r}dr = -\frac{J(a)a}{\sigma}\ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Lembrando que $RI = V = |\Delta V|$ obtemos

$$R = \frac{|\Delta V|}{I} = \frac{|\Delta V|}{J(a)2\pi aL} = \boxed{\frac{1}{2\pi L\sigma}\ln\left(\frac{b}{a}\right)}.$$

<u>Solução alternativa:</u>

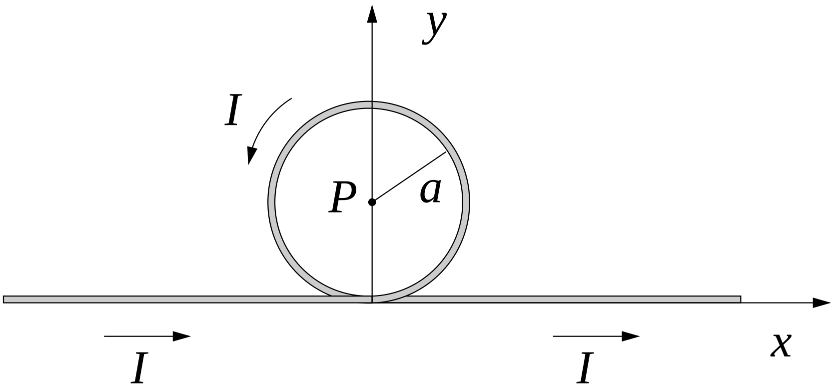
$$R = \rho\int_a^b \frac{dr}{A(r)} = \frac{1}{\sigma}\int_a^b \frac{dr}{2\pi Lr} = \frac{1}{2\pi L\sigma}\ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

(d) Cálculo de $J(a)$:

$$J(a) = \frac{I}{2\pi aL} = \frac{V}{R}\,\frac{1}{2\pi aL} = \boxed{\frac{V\sigma}{a\ln\left(\frac{b}{a}\right)}}.$$

Questão 2

Uma corrente elétrica I percorre um fio infinito que está alinhado com o eixo x. Ao atingir a origem do sistema de coordenadas, o fio dá uma volta completa em torno do ponto P.



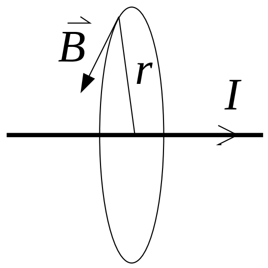
(a) (1,0 ponto) Considerando apenas as partes retilíneas do fio, determine o vetor campo magnético no ponto P.

(b) (1,0 ponto) Calcule o vetor campo magnético produzido pelo trecho circular no ponto P.

(c) (0,5 ponto) Determine o vetor campo magnético total no ponto P.

Solução da questão 2

(a) Os dois trechos retilíneos compõem um fio reto infinito. Por simetria $\vec{B} = B(r)\widehat{\theta}$.

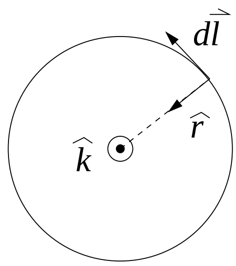


A lei de Ampère fornece

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint B\, d\ell = B(r) \oint d\ell = B 2\pi r = \mu_0\, I$$

$$\Longrightarrow \vec{B}(r) = \frac{\mu_0\, I}{2\pi r}\,\widehat{\theta} \Longrightarrow \boxed{\vec{B}_1(P) = \frac{\mu_0\, I}{2\pi a}\,\widehat{k}}.$$

(b) Para o trecho circular, usamos a lei de Biot-Savart,



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0\, I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \times \widehat{r}}{r^2}.$$

No nosso caso, $d\vec{\ell} \times \widehat{r} = dl\,\widehat{k}$ e $r = a$. Assim,

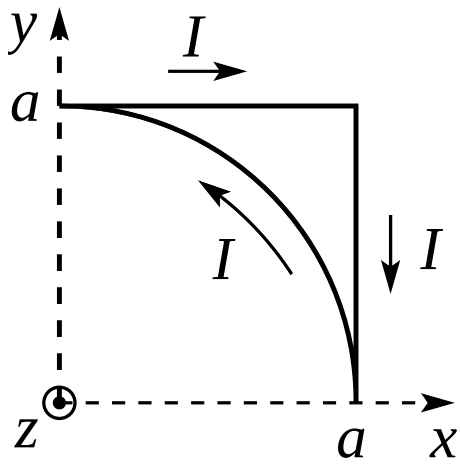
$$\vec{B}_2(P) = \frac{\mu_0\, I}{4\pi a^2} \oint dl\,\widehat{k} = \boxed{\frac{\mu_0\, I}{2a}\,\widehat{k}}.$$

(c) O campo total é

$$\vec{B}(P) = \vec{B}_1(P) + \vec{B}_2(P) = \boxed{\frac{\mu_0\, I}{2a}\left(1 + \frac{1}{\pi}\right)\widehat{k}}.$$

Questão 3

Uma espira é formada por dois segmentos de reta de comprimento a e um trecho semicircular de raio a, conforme ilustrado na figura. A espira está sujeita a um campo magnético uniforme dado por $\vec{B} = C\hat{\imath}$ e a corrente I percorre a espira no sentido indicado na figura.



(a) (1,0 ponto) Calcule o vetor força magnética sobre os segmentos retilíneos horizontal e vertical.

(b) (0,5 ponto) Calcule o vetor força magnética sobre o trecho circular.

(c) (1,0 ponto) Determine o torque sobre a espira.

Solução da questão 3

(a) Segmento retilíneo horizontal:

$$\vec{F}_1 = I \int d\vec{l} \times \vec{B} = I(a\,\widehat{\imath}) \times (C\,\widehat{\imath}) = \boxed{\vec{0}}.$$

Segmento retilíneo vertical:

$$\vec{F}_2 = I \int d\vec{l} \times \vec{B} = I(-a\,\widehat{\jmath}) \times (C\,\widehat{\imath}) = \boxed{IaC\,\widehat{k}}.$$

(b) Segmento circular

$$\vec{F}_3 = I \int d\vec{l} \times \vec{B} = I \int_0^{\pi/2} (-a \operatorname{sen}\theta\, d\theta\,\widehat{\imath} + a\cos\theta\, d\theta\,\widehat{\jmath}\,) \times (C\,\widehat{\imath}\,) = \boxed{-IaC\,\widehat{k}}.$$

<u>Solução alternativa</u>: a força resultante sobre uma espira num campo uniforme é zero.

$$\Longrightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0} \Longrightarrow \vec{F}_3 = -\vec{F}_2 = -IaC\,\widehat{k}.$$

(c) O torque sobre a espira é

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} = I\vec{A} \times \vec{B} = -Ia^2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\widehat{k} \times (C\,\widehat{\imath}) = \boxed{-Ia^2C\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\,\widehat{\jmath}}.$$

Questão 4

Um solenoide toroidal, mostrado na figura 1 e em corte transversal na figura 2, contém N espiras e é percorrido por uma corrente I. O núcleo do solenoide está preenchido por ar ($\mu_{ar} = \mu_0$).

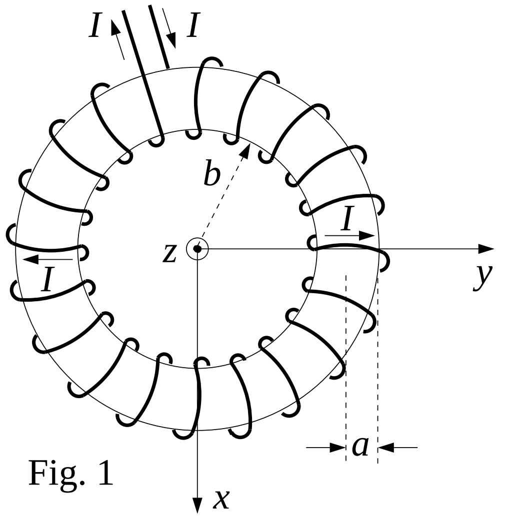


Fig. 1

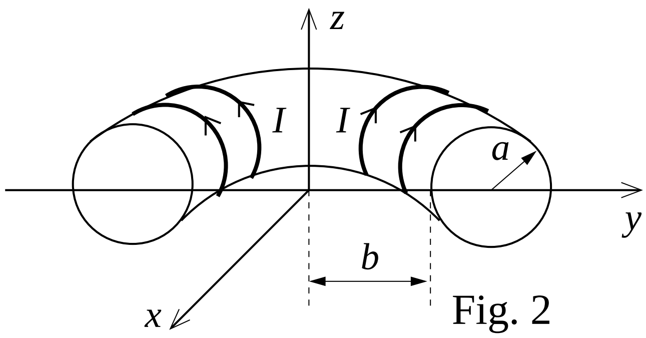


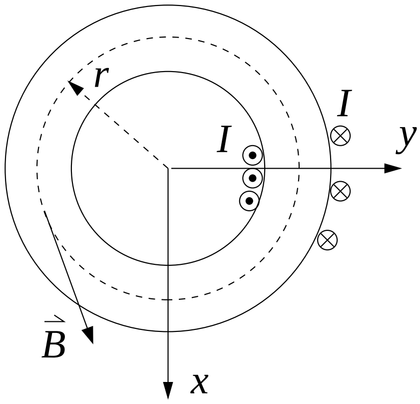
Fig. 2

(a) (1,5 ponto) Calcule o vetor campo magnético $\vec{B}(0, y, 0)$ em coordenadas cartesianas (isto é na forma $\vec{B} = B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}$) ao longo do eixo y para $y \geq 0$.

(b) (1,0 ponto) Constrói-se um outro solenoide toroidal com as mesmas dimensões do solenoide da figura mas com um núcleo de aço inoxidável de permeabilidade $\mu = 80\mu_0$. Passando a mesma corrente pelos dois solenoides, calcule a relação entre o número de espiras $N_{\text{aço}}$ e N_{ar} no solenoide com núcleo de aço e com núcleo de ar, respectivamente, para produzir o mesmo campo magnético B nos núcleos dos dois solenoides.

$\boxed{\textbf{Solução da questão 4}}$

(a) Por simetria $\vec{B} = B(r)\,\widehat{\theta}$. Usando a lei de Ampère com um caminho circular de raio



r, conforme a figura, obtemos

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint B\, d\ell = B(r) 2\pi r = \mu_0 N\, I$$

$$\Longrightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 N\, I}{2\pi r}\,\widehat{\theta}.$$

Para $r < b$ ou $r > b + 2a$, a corrente total $I = 0$ e $B(r)2\pi r = \mu_0 N\, I \Longrightarrow \vec{B} = \vec{0}$.

$$\boxed{\vec{B}(0, y, 0) = \begin{cases} \vec{0} & \text{se} \quad 0 \leq y < b \\ -\dfrac{\mu_0 N\, I}{2\pi y}\,\widehat{\imath} & \text{se} \quad b < y < b + 2a \\ \vec{0} & \text{se} \quad y > b + 2a \end{cases}}$$

(b) O campo dentro do solenoide com núcleo de aço é $\vec{B}_{\text{aço}} = K_m \vec{B}_{\text{ar}} = (\mu/\mu_0)\vec{B}_{\text{ar}}$, ou seja basta substituir μ_0 por μ na expressão do item (a).

$$\Longrightarrow B_{\text{aço}} = \frac{\mu N_{\text{aço}}\, I}{2\pi r}.$$

Colocando $B_{\text{aço}} = B_{\text{ar}}$ obtemos

$$\frac{\mu N_{\text{aço}}\, I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 N_{\text{ar}}\, I}{2\pi r} \Longrightarrow \boxed{\frac{N_{\text{aço}}}{N_{\text{ar}}} = \frac{\mu_0}{\mu} = \frac{1}{80}}.$$

Formulário

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}, \quad \rho = \frac{1}{\sigma}, \quad dR = \rho \frac{d\ell}{A}, \quad V = RI, \quad V = \mathcal{E} - Ir, \quad P = VI = I^2 R = \frac{V^2}{R},$$

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}, \quad I = \int \vec{J} \cdot d\vec{A}, \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0, \quad d\vec{F} = I d\vec{\ell} \times \vec{B}, \quad \vec{\mu} = I\vec{A},$$

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}, \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \times \widehat{r}}{r^2}, \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{int}, \quad d\vec{l} = -r \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, \widehat{\imath} + r \cos\theta \, d\theta \, \widehat{\jmath},$$

$$\widehat{r} = \cos\theta \, \widehat{\imath} + \operatorname{sen}\theta \, \widehat{\jmath}, \quad \widehat{\theta} = -\operatorname{sen}\theta \, \widehat{\imath} + \cos\theta \, \widehat{\jmath}.$$