**Física III - 4323203**

Escola Politécnica - 2016

GABARITO DA P3

**23 de junho de 2016**

## Questão 1

Considere um sistema composto por um fio retilíneo infinito e uma espira quadrada de lado $a$. O fio, que está colocado ao longo do eixo $z$ de um sistema de referência, é percorrido por uma corrente $I$ e gera um campo magnético dado por $\vec{B} = \mu_0 I\, \widehat{\phi}/(2\pi r)$, onde $r$ é a distância até o fio.

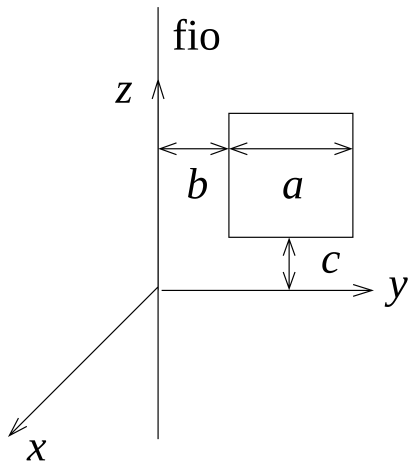



FIG. 1

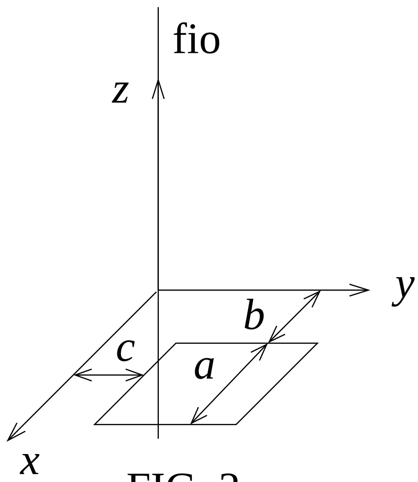



FIG. 2

(a) (1,0 ponto) Calcule a indutância mútua entre o fio e a espira quando ela está colocada no plano $yz$, conforme a figura 1.

(b) (0.5 ponto) Calcule a indutância mútua entre o fio e a espira quando ela está colocada no plano $xy$, conforme a figura 2.

(c) (1,0 ponto) Suponha, agora, que a espira tem resistência $R$ e que a corrente no fio varia no tempo como $I(t) = \alpha t^2$, onde $\alpha$ é uma constante positiva. Com a espira na posição indicada na figura 1, calcule a corrente induzida na espira. Esta corrente circula a espira no sentido horário ou anti-horário? Justifique sua resposta.

**Solução da questão 1**

(a) O fluxo do campo magnético sobre a espira no plano $yz$ é

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_b^{b+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} a dr = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln\left(\frac{a+b}{b}\right).$$

O fluxo também pode ser escrito como $\Phi_B = MI$. Comparando com a expressão anterior obtemos

$$\boxed{M = \frac{\mu_0\, a}{2\pi} \ln\left(\frac{a+b}{b}\right)}.$$

(b) Quando a espira está no plano $xy$ o fluxo magnético é nulo porque o campo magnético é perpendicular ao vetor área. Portanto, <u>a indutância mútua é nula</u>.

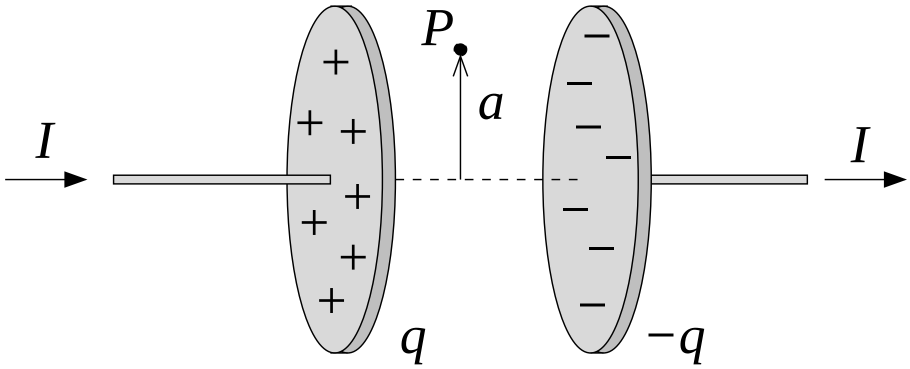
(c) A corrente induzida na espira quando ela está no plano $yz$ é

$$I_{ind} = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{M}{R}\frac{dI}{dt} = \boxed{\frac{\mu_0\, a\, \alpha\, t}{R\, \pi} \ln\left(\frac{a+b}{b}\right)}.$$

Pela lei de Lenz o sentido da corrente é <u>anti-horário</u>.

## Questão 2

(I) (1,5 ponto) Um capacitor de placas paralelas circulares, no vácuo, está sendo carregado, como indica a figura abaixo. As placas têm raio $R$ e a corrente de condução nos fios no instante $t$ é igual a $I(t)$.




Calcule o campo magnético no ponto $P$ a uma distância $a < R$ do eixo do capacitor, conforme a figura. Dado: o campo elétrico dentro do capacitor é $E = \sigma/\epsilon_0$, onde $\sigma$ é a densidade superficial de carga.

(II) (1,0 ponto) O campo elétrico de uma onda que se propaga no vácuo é dada por $\vec{E} = E_0 e^{-\alpha(x-ct)^2}\,\hat{\jmath}$, onde a constante $\alpha > 0$. Use a lei de Faraday, $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, para calcular o campo vetorial $\vec{B}$ desta onda.

**Solução da questão 2**

(I) Capacitor com placas planas circulares

Aplicando a lei de Ampère-Maxwell temos:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = B2\pi a = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\int \vec{E}\cdot d\vec{A} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\pi a^2) = \mu_0\pi a^2\frac{\partial(q/\pi R^2)}{\partial t} = \frac{\mu_0\pi a^2 I}{\pi R^2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0 a I}{2\pi R^2}}.$$

(II) Cálculo do campo magnético

Como o campo $\vec{E}$ só tem componente $y$, a lei de Faraday se escreve como

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \frac{\partial E_y}{\partial x}\,\widehat{k} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Como estamos interessados na solução ondulatória podemos colocar $B_x = B_y = 0$. Basta resolver

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}.$$

Definindo $s = x - ct$ podemos escrever $E_y = E_0 e^{-\alpha s^2}$.

$$\frac{\partial s}{\partial x}\frac{dE_y}{ds} = -\frac{\partial s}{\partial t}\frac{dB_z}{ds} \Leftrightarrow -2\alpha s E_0 e^{-\alpha s^2} = c\frac{dB_z}{ds}$$

$$\Longrightarrow B_z(s) = -\frac{E_0}{c}\int 2\alpha s e^{-\alpha s^2} ds = \frac{E_0}{c}e^{-\alpha s^2} \Longrightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{E_0}{c}e^{-\alpha(x-ct)^2}\,\widehat{k}}.$$

## Questão 3

Uma onda eletromagnética plana monocromática de comprimento de onda $\lambda$ propaga-se no vácuo no sentido positivo do eixo $z$. Seu campo elétrico oscila na direção $x$ e sua amplitude assume metade do seu valor máximo $E_0$ na origem do sistema de coordenadas no instante $t = 0$. Nos itens (a) e (b) abaixo, expresse suas respostas em termos de $E_0$, $c$, $\mu_0$ e $\lambda$.

(a) (1,5 ponto) Escreva a expressões dos vetores campo elétrico e campo magnético associados a esta onda.

(b) (0.5 ponto) Calcule o vetor de Poynting.

(c) (0.5 ponto) No instante $t = 0$, um elétron de carga $q_e$ está passando pela origem do sistema de coordenadas com velocidade $c/2$, na direção e sentido do eixo $z$. Calcule o vetor força que age sobre o elétron em $t = 0$ devido a essa onda.

**Solução da questão 3**

(a) A expressão geral do campo elétrico da onda do problema é

$$\vec{E} = E_0 \cos(kz - \omega t + \phi)\widehat{\imath} = E_0 \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(z - ct) + \phi\right]\widehat{\imath},$$

onde usamos que $k = 2\pi/\lambda$ e $\omega = kc$. A condição $|\vec{E}(0,0)| = E_0 \cos\phi = E_0/2 \Longrightarrow \phi = \pi/3$. Assim,

$$\boxed{\vec{E} = E_0 \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(z - ct) + \frac{\pi}{3}\right]\widehat{\imath}}.$$

O campo magnético é

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\widehat{k} \times \vec{E}}{c} = \frac{E_0}{c} \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(z - ct) + \frac{\pi}{3}\right]\widehat{\jmath}}$$

(b) O vetor de Poynting é

$$\boxed{\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{c\mu_0} \cos^2\left[\frac{2\pi}{\lambda}(z - ct) + \frac{\pi}{3}\right]\widehat{k}}.$$

(c) A força que atua sobre o elétron é a força de Lorentz:

$$\vec{F} = q_e\vec{E} + q_e\vec{v} \times \vec{B}.$$

No instante $t = 0$, na origem, $\vec{E}(0,0) = (E_0/2)\widehat{\imath}$, $\vec{B}(0,0) = (E_0/2c)\widehat{\jmath}$ e $\vec{v} = (c/2)\widehat{k}$. Portanto,

$$\boxed{\vec{F} = q_e\frac{E_0}{2}\widehat{\imath} - q_e\frac{c}{2}\frac{E_0}{2c}\widehat{\imath} = \frac{q_e\,E_0}{4}\widehat{\imath}}.$$

## Questão 4

Um feixe de luz laser monocromático incide normalmente sobre uma placa que absorve totalmente a radiação. O feixe tem intensidade $I$ e seção reta circular de raio $R$.

(a) (1,0 ponto) Calcule a amplitude do campo magnético do feixe.

(b) (1,0 ponto) Calcule a energia média absorvida pela placa no intervalo de tempo $T$.

(c) (0,5 ponto) Calcule a energia eletromagnética média contida num comprimento $L$ do feixe.

**Solução da questão 4**

(a) A amplitude $B_m$ do campo magnético pode ser calculado através da intensidade:

$$I = < S > = < \frac{EB}{\mu_0} > = \frac{c < B^2 >}{\mu_0} = \frac{cB_m^2}{2\mu_0} \Longrightarrow \boxed{B_m = \sqrt{\frac{2\mu_0 I}{c}}}.$$

(b) O vetor de Poynting fornece a energia média absorvida por unidade de tempo por unidade de área. Portanto, a energia média absorvida pela placa é

$$\boxed{E = I\pi R^2 T}.$$

(c) A energia média num comprimento $L$ do feixe é igual à energia média contida num cilindro de volume $L\pi R^2$.

$$\boxed{E = < u > L\pi R^2 = \frac{IL\pi R^2}{c}}.$$

**Formulário**

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt}, \quad \Phi^{total} = LI, \quad \Phi_{21}^{total} = M_{21}I_1 = MI_1, \quad u_m = \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad U = \frac{LI^2}{2},$$

$$u_e = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}, \quad \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}, \quad \oint \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0, \ \mathcal{E} = \oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\cdot d\vec{A} = -\frac{d\Phi_m}{dt},$$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0\epsilon_0 \frac{d}{dt}\int \vec{E}\cdot d\vec{A}, \quad I = \int \vec{J}\cdot d\vec{A}, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}, \quad \nabla^2\vec{E} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}, \quad \nabla^2\vec{B} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}, \quad E = cB,$$

$$\vec{E} = E_m\cos(kx \pm \omega t + \phi)\widehat{e}_y, \quad \vec{B} = B_m\cos(kx \pm \omega t + \phi)\widehat{e}_z, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad k\,c = \omega,$$

$$f = 1/T, \quad \vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}, \quad S = uc, \quad u = u_e + u_m = \frac{\epsilon_0\,E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad I = \langle S \rangle = \frac{E_m\,B_m}{2\mu_0},$$

$$\langle \cos^2(kx - \omega t + \phi) \rangle = \langle \operatorname{sen}^2(kx - \omega t + \phi) \rangle = 1/2, \quad \langle \cos(kx - \omega t + \phi)\operatorname{sen}(kx - \omega t + \phi) \rangle = 0.$$

Para um campo vetorial $\vec{R}(x,y,z,t) = R_x(x,y,z,t)\widehat{\imath} + R_y(x,y,z,t)\widehat{\jmath} + R_z(x,y,z,t)\widehat{k}$ temos

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{R} = \frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} + \frac{\partial R_z}{\partial z}\ ; \quad \vec{\nabla}\times\vec{R} = \begin{vmatrix} \widehat{\imath} & \widehat{\jmath} & \widehat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix}\ ; \quad \nabla^2\vec{R} = \frac{\partial^2\vec{R}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\vec{R}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\vec{R}}{\partial z^2}\ .$$