

Física III - 4323203

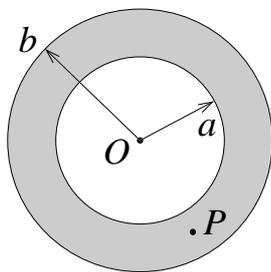
Escola Politécnica - 2016

Prova de Recuperação

21 de julho de 2016

Questão 1

A camada esférica na figura abaixo tem uma distribuição volumétrica de carga dada por



$$\rho(r) = \begin{cases} 0 & \text{para } r < a \\ \alpha/r^2 & \text{para } a \leq r \leq b \\ 0 & \text{para } r > b, \end{cases}$$

onde a constante $\alpha > 0$ e r é a distância até o centro O da distribuição.

- (0,5 ponto) Calcule a carga elétrica total da distribuição.
- (1,0 ponto) Calcule o vetor campo elétrico em todo o espaço.
- (1,0 ponto) Considere o potencial nulo no centro O da distribuição. Usando o campo elétrico, calcule o potencial num ponto P a uma distância r do centro O (região $a < r < b$).

Solução da questão 1

(a) A carga total é

$$Q = \int \rho dV = \int_a^b \frac{\alpha}{r^2} 4\pi r^2 dr = \boxed{4\pi\alpha(b-a)}.$$

(b) Por simetria, o campo elétrico é radial: $\vec{E} = E(r)\hat{r}$. A lei de Gauss, usando uma superfície esférica S concêntrica com a distribuição, fornece

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint_S E(r) dA = 4\pi r^2 E(r) = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \implies E(r) = \frac{q_{in}}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Para $r < a$, $q_{in} = 0 \implies E = 0$.

Para $r > b$, $q_{in} = Q = 4\pi\alpha(b-a) \implies E = \frac{\alpha(b-a)}{\epsilon_0 r^2}$.

Para $a \leq r \leq b$,

$$q_{in} = q_{in}(r) = \int_a^r \frac{\alpha}{r^2} 4\pi r^2 dr = 4\pi\alpha(r-a) \implies E = \frac{\alpha(r-a)}{\epsilon_0 r^2} = \frac{\alpha}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{a}{r^2} \right).$$

$$\vec{E} = \begin{cases} \vec{0} & \text{para } r < a \\ \frac{\alpha}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{a}{r^2} \right) \hat{r} & \text{para } a \leq r \leq b \\ \frac{\alpha(b-a)}{\epsilon_0 r^2} \hat{r} & \text{para } r > b. \end{cases}$$

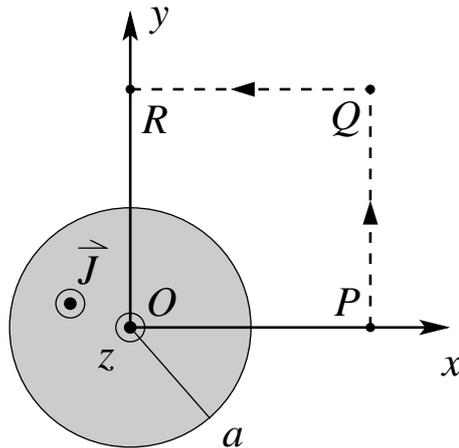
(c) Na região $r < a$ o campo é nulo. Portanto, o potencial é constante e igual a $V_O = 0$.

Como o potencial é contínuo, $V(r=a) = V_O = 0$. O potencial na região $a \leq r \leq b$ pode ser calculado a partir do campo:

$$V(r) = - \int_a^r E(r) dr = - \int_a^r \frac{\alpha}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{a}{r^2} \right) dr = \boxed{-\frac{\alpha}{\epsilon_0} \left[\ln \left(\frac{r}{a} \right) + \frac{a}{r} - 1 \right]}.$$

Questão 2

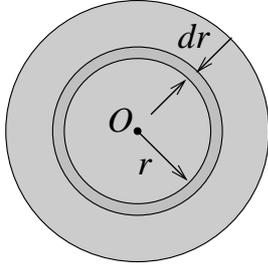
Em um cilindro condutor infinito de raio a , visto em corte transversal na figura, a densidade de corrente é dada por $\vec{J}(r) = \alpha r \hat{k}$, onde r é a distância até o eixo do cilindro (eixo z).



- (0,5 ponto) Calcule a corrente total que atravessa a seção transversal do condutor.
- (1,0 ponto) Calcule o vetor campo magnético total em todo o espaço.
- (1,0 ponto) Determine a integral de linha do campo magnético ao longo do trecho PQR , no sentido indicado na figura.

Solução da questão 2

(a) A corrente que passa através de um anel de raio r e largura dr da seção é



$dI = \vec{J} \cdot d\vec{A} = (\alpha r)(2\pi r dr)$. A corrente através de toda a seção é

$$I_{total} = \int_0^a \alpha r 2\pi r dr = \frac{2\pi\alpha r^3}{3} \Big|_0^a = \boxed{\frac{2\pi\alpha a^3}{3}}.$$

(b) O campo magnético é calculado através da lei de Ampère, $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{int}$. O campo tem simetria cilíndrica: $\vec{B} = B(r)\hat{\theta}$. Usando um círculo C de raio r , coaxial com o fio, obtemos

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint_C B(r) d\ell = 2\pi r B(r) = \mu_0 I_{int} \implies B(r) = \frac{\mu_0 I_{int}}{2\pi r},$$

onde I_{int} é a corrente através do disco de raio r com borda C .

Para $r < a$,

$$I_{int} = I(r) = \int_0^r \alpha r 2\pi r dr = \frac{2\pi\alpha r^3}{3} \implies B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi r} \frac{2\pi\alpha r^3}{3} = \frac{\mu_0\alpha r^2}{3}.$$

Para $r > a$, $I_{int} = I_{total}$. Assim,

$$B(r) = \frac{\mu_0 I_{total}}{2\pi r} = \frac{\mu_0}{2\pi r} \frac{2\pi\alpha a^3}{3} = \frac{\mu_0\alpha a^3}{3r}.$$

Portanto,

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0\alpha r^2}{3} \hat{\theta} & \text{para } r < a \\ \frac{\mu_0\alpha a^3}{3r} \hat{\theta} & \text{para } r > a \end{cases}.$$

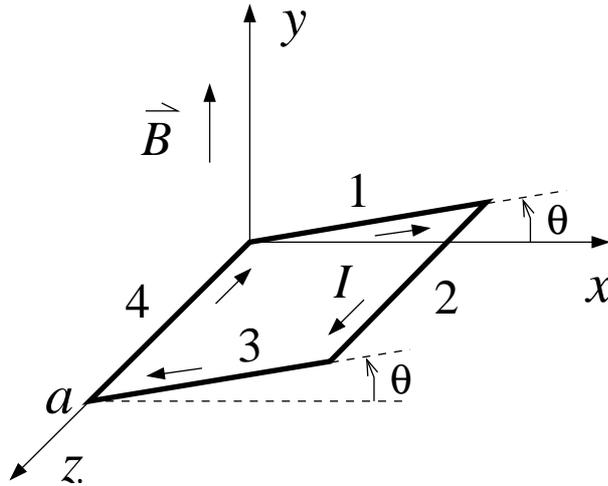
(c) Como o campo \vec{B} é perpendicular aos segmentos OP e RO ,

$$\int_{PQR} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint_{OPQRO} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \frac{\mu_0 I_{total}}{4} = \boxed{\frac{\mu_0\pi\alpha a^3}{6}},$$

onde usamos a lei de Ampère para calcular a integral sobre o percurso $OPQRO$.

Questão 3

Uma espira quadrada de lado a , percorrida por uma corrente I , pode girar livremente em torno do eixo z conforme a figura. Cada trecho da espira está numerado de 1 a 4. Seja θ o ângulo que o trecho 1 faz com o eixo x . Na região onde se encontra a espira existe um campo magnético uniforme $\vec{B} = B\hat{y}$.



- (a) (1,5 ponto) Calcule as forças \vec{F}_1 , \vec{F}_2 , \vec{F}_3 , \vec{F}_4 em cada trecho da espira.
- (b) (1,0 ponto) Calcule o torque sobre a espira.

Solução da questão 3

(a) Como \vec{B} é uniforme, as forças sobre os trechos 1, 2, 3 e 4 da espira são dadas por

$$\vec{F}_1 = I \left(\int_1 d\vec{\ell} \right) \times \vec{B} = I\vec{\ell}_1 \times \vec{B} = Ia(\cos\theta\hat{i} + \text{sen}\theta\hat{j}) \times B\hat{j} = \boxed{IaB \cos\theta\hat{k}},$$

$$\vec{F}_2 = I \left(\int_2 d\vec{\ell} \right) \times \vec{B} = I\vec{\ell}_2 \times \vec{B} = I(a\hat{k}) \times B\hat{j} = \boxed{-IaB\hat{i}},$$

$$\ell_1 = -\ell_3 \implies \vec{F}_3 = -\vec{F}_1 = \boxed{-IaB \cos\theta\hat{k}},$$

$$\ell_2 = -\ell_4 \implies \vec{F}_4 = -\vec{F}_2 = \boxed{IaB\hat{i}}.$$

(b) O momento de dipolo magnético da espira é $\vec{\mu} = I\vec{A}$, onde \vec{A} é o vetor área com a direção da normal determinada pelo sentido da corrente. No nosso caso $\vec{A} = a^2\hat{n} = a^2(\text{sen}\theta\hat{i} - \cos\theta\hat{j})$. Assim,

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} = Ia^2(\text{sen}\theta\hat{i} - \cos\theta\hat{j}) \times B\hat{j} = \boxed{Ia^2B \text{sen}\theta\hat{k}}.$$

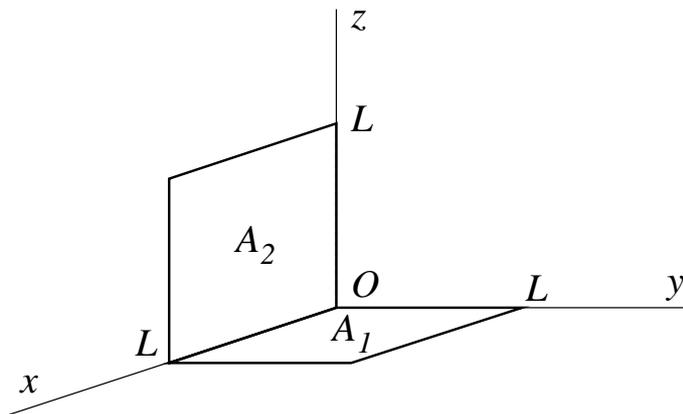
Solução alternativa: Note que as forças \vec{F}_1 e \vec{F}_3 formam um binário, assim como as forças \vec{F}_2 e \vec{F}_4 . Portanto, o torque independe do ponto em relação ao qual ele é calculado. Calculando o torque em relação ao eixo z , \vec{F}_1 e \vec{F}_3 não contribuem porque são paralelas ao eixo z . \vec{F}_4 não contribui porque está aplicada sobre o eixo z . Assim,

$$\vec{\tau} = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = a(\cos\theta\hat{i} + \text{sen}\theta\hat{j}) \times (-IaB\hat{i}) = \boxed{Ia^2B \text{sen}\theta\hat{k}}.$$

Questão 4

Uma onda plana monocromática tem comprimento de onda λ e período T . Na origem O de um sistema de coordenadas cartesianas o módulo do campo elétrico desta onda se anula no instante $t = 0$ e atinge seu valor máximo E_m no instante $T/4$. O campo elétrico desta onda oscila ao longo do eixo y e o campo magnético oscila ao longo do eixo x .

- (a) (1,5 ponto) Escreva as expressões para os vetores campo elétrico e magnético desta onda. Expresse sua resposta em função de λ , E_m e da velocidade da luz c .
- (b) (1,0 ponto) Calcule a energia por unidade de tempo que atravessa as áreas A_1 e A_2 mostradas na figura. Estas áreas são quadrados de lado L .



Solução da questão 4

- (a) A direção de propagação da onda é a mesma do produto $\vec{E} \times \vec{B} = E \hat{j} \times B \hat{i} = -EB \hat{k}$, ou seja a onda se propaga na direção negativa do eixo z .

$$\vec{E} = E_m \cos(kz + \omega t + \phi) \hat{j} = E_m \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} (z + ct) + \phi \right] \hat{j},$$

onde usamos $k = 2\pi/\lambda$, $\omega = kc = 2\pi c/\lambda$.

Cálculo da fase ϕ :

$$\left. \begin{aligned} E(0, 0) = 0 &\implies E_m \cos(\phi) = 0 \implies \phi = \pm\pi/2 \\ E(0, T/4) = E_m &\implies E_m \cos \left(\frac{\pi cT}{2\lambda} + \phi \right) = E_m \Leftrightarrow E_m \cos \left(\frac{\pi}{2} + \phi \right) = E_m \end{aligned} \right\} \implies \phi = -\pi/2.$$

Portanto,

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{E} &= E_m \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} (z + ct) - \frac{\pi}{2} \right] \hat{j} = E_m \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} (z + ct) \right] \hat{j}, \\ \vec{B} &= \frac{E_m}{c} \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} (z + ct) - \frac{\pi}{2} \right] \hat{i} = \frac{E_m}{c} \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} (z + ct) \right] \hat{i}. \end{aligned}}$$

- (b) A energia por unidade de tempo por unidade de área é dada pelo vetor de Poynting:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = -\frac{E_m^2}{c\mu_0} \sin^2 \left[\frac{2\pi}{\lambda} (z + ct) \right] \hat{k}.$$

A energia por unidade de tempo através da área A_1 , adotando a normal na direção $-\hat{k}$ e colocando $z = 0$ é

$$\frac{dU}{dt} = \int_{A_1} \vec{S} \cdot d\vec{A} = \vec{S} \cdot \vec{A}_1 = \frac{E_m^2 L^2}{c\mu_0} \sin^2 \left[\frac{2\pi ct}{\lambda} \right].$$

A energia por unidade de tempo através da área A_2 é zero porque $\vec{S} \perp d\vec{A}$ em A_2 .

Formulário

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}, \quad V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}, \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V,$$

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{A}, \quad V = RI, \quad P = VI = I^2R = \frac{V^2}{R}, \quad \vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B},$$

$$d\mathcal{V} = 4\pi r^2 dr, \quad \Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}, \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0, \quad d\vec{F} = I d\vec{\ell} \times \vec{B}, \quad \vec{\mu} = I\vec{A},$$

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}, \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2}, \quad \frac{F}{\ell} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}, \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{int},$$

$$\vec{E} = E_m \cos(kx \pm \omega t + \phi) \hat{e}_y, \quad \vec{B} = B_m \cos(kx \pm \omega t + \phi) \hat{e}_z, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad kc = \omega,$$

$$f = 1/T, \quad \vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}, \quad S = uc, \quad u = u_e + u_m = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad I = \langle S \rangle = \frac{E_m B_m}{2\mu_0},$$