Física III - 4323203

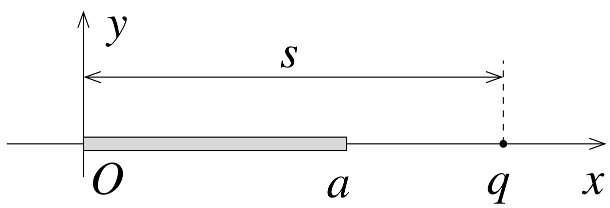
Escola Politécnica - 2016

GABARITO DA PS

30 de junho de 2016

Questão 1

Uma barra fina, isolante, de comprimento $\underline{a}$, com densidade linear de carga $\lambda = Cx$, onde $C > 0$ é constante, está disposta ao longo do eixo x como mostra a figura abaixo. Uma carga q é colocada a uma distância $s > a$ da origem O.



(a) (1,0 ponto) Calcule o trabalho para trazer a carga do infinito até a posição $(s, 0, 0)$.

(b) (1,5 ponto) Calcule a força de interação entre a carga e o fio.

Solução da questão 1

(a) O trabalho W é igual à energia potencial da carga no ponto $(s, 0, 0)$. O potencial é

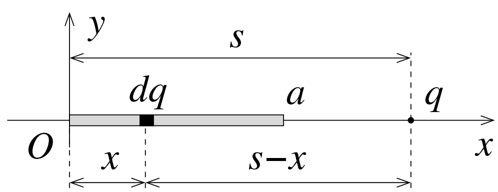
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^a \frac{Cxdx}{s-x} = -\frac{C}{4\pi\epsilon_0}\left[x + s\ln(s-x)\right]_0^a$$

$$= -\frac{C}{4\pi\epsilon_0}\left[a + s\ln\left(\frac{s-a}{s}\right)\right]$$

$$\Longrightarrow \boxed{W = qV = -\frac{qC}{4\pi\epsilon_0}\left[s\ln\left(\frac{s-a}{s}\right) + a\right]}.$$

(b) A força de interação é dada por $\vec{F} = q\vec{E}$, onde $\vec{E}$ só possui a componente x. Portanto, $\vec{E} = \int dE_x\,\widehat{\imath}$, onde

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Cxdx}{(s-x)^2}$$



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^a \frac{Cxdx}{(s-x)^2}\,\widehat{\imath}$$

$$= \frac{C}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{s}{s-x} + \ln(s-x)\right]_0^a \widehat{\imath}.$$

$$\boxed{\vec{F} = q\vec{E} = \frac{qC}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{a}{s-a} + \ln\left(\frac{s-a}{s}\right)\right]\widehat{\imath}}.$$

Solução alternativa: O campo também pode ser obtido derivando o potencial obtido no item (a).

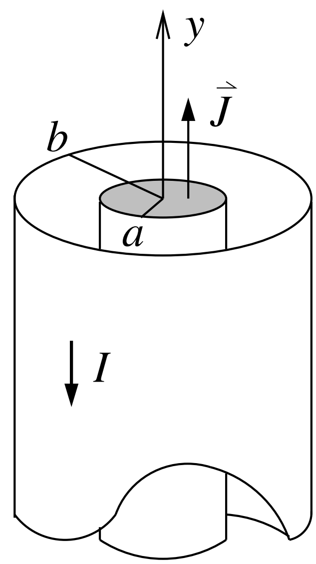
$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial s} = \frac{qC}{4\pi\epsilon_0}\frac{\partial}{\partial s}\left[s\ln(s-a) - s\ln(s) - a\right]$$
$$= \frac{qC}{4\pi\epsilon_0}\left[\ln(s-a) + \frac{s}{s-a} - \ln s - 1\right] = \frac{C}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{a}{s-a} + \ln\left(\frac{s-a}{s}\right)\right]\widehat{\imath}.$$

Temos $\vec{E} = E_x\,\widehat{\imath}$, portanto

$$\boxed{\vec{F} = q\vec{E} = \frac{qC}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{a}{s-a} + \ln\left(\frac{s-a}{s}\right)\right]\widehat{\imath}}.$$

Questão 2

Um fio condutor muito longo e de seção cilíndrica de raio a está envolto por uma casca cilíndrica de raio b, formando um *cabo coaxial*. No fio há uma densidade de corrente uniforme $\vec{J} = J\hat{\jmath}$, onde $J > 0$. Na casca flui uma corrente I no sentido negativo do eixo y.



(a) (1,0 ponto) Calcule o vetor campo magnético nos pontos onde $0 \leq r \leq b$ (r é a distância do ponto até o eixo y).

(b) (1,5 ponto) Determine a razão J/I para a qual o vetor campo magnético se anula na região exterior à casca cilíndrica ($r > b$).

Solução da questão 2

A lei de Ampère

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I(r),$$

onde C é um círculo de raio r, coaxial com o cabo, e a simetria cilíndrica do problema resultam em

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = B(r)2\pi r = \mu_0 I(r) \Rightarrow B(r) = \mu_0 \frac{I(r)}{2\pi r}.$$

(a) Cálculo do campo $\vec{B}$ dentro do cabo coaxial.

Para $0 \le r < a$,

$$I(r) = \int \vec{J}\cdot d\vec{A} = \pi r^2 J.$$

Logo;

$$\boxed{\vec{B}(r<a) = \frac{\mu_0 J}{2} r\,\hat{\phi}}.$$

Para $a \le r \le b$,

$$I(r) = \int \vec{J}\cdot d\vec{A} = \pi a^2 J.$$

Logo

$$\boxed{\vec{B}(a \le r \le b) = \frac{\mu_0 a^2 J}{2r}\,\hat{\phi}}.$$

(b) Cálculo do campo $\vec{B}$ fora do cabo coaxial ($r > b$).

$$I(r) = \int \vec{J}\cdot d\vec{A} - I = \pi a^2 J - I.$$

Logo

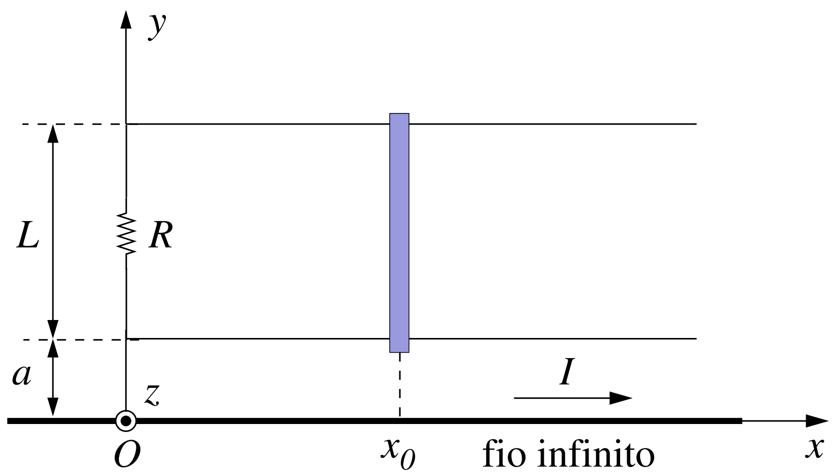
$$\vec{B}(r>b) = \mu_0 \frac{\pi a^2 J - I}{2\pi r}\,\hat{\phi}.$$

A razão J/I para a qual o campo magnético se anula para $r > b$ é

$$\boxed{\frac{J}{I} = \frac{1}{\pi a^2}}.$$

Questão 3

Uma barra condutora vertical de comprimento L pode se mover deslizando sem atrito sobre dois condutores paralelos fixos. A barra, os condutores e uma barra fixa ao longo do eixo y formam um circuito fechado com resistência R. Próximo do condutor inferior, a uma distância a, existe um fio horizontal infinito e paralelo aos dois condutores como mostra a figura abaixo.



(a) (1,5 ponto) No instante $t = 0$ começa a passar no fio infinito uma corrente que aumenta com o tempo segundo a expressão $I(t) = I_f(1 - e^{-t/\tau})$, onde I_f e τ são constantes. Calcule a corrente induzida i_{ind} no circuito e o seu sentido (horário ou anti-horário) no caso em que a barra é mantida fixa na posição x_0.

(b) (1,0 ponto) Calcule o módulo e o sentido da força externa $\vec{F}_{ext}$ necessária para manter a barra na posição x_0 enquanto a corrente no fio infinito aumenta.

<u>Dado:</u> campo magnético gerado pelo fio $\vec{B} = \mu_0 I \,\widehat{\phi}/(2\pi r)$, onde r é a distância até o fio.

Solução da questão 3

(a) Como a barra está fixa, o comprimento horizontal do circuito é x_0. O fluxo magnético através do circuito é

$$\Phi = \int \vec{B}.d\vec{A} = \int_a^{a+L} \frac{\mu_0 I x_0 dy}{2\pi y} = \frac{\mu_0 I x_0}{2\pi} \int_a^{a+L} \frac{dy}{y} = \frac{\mu_0 x_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{a+L}{a}\right)$$

A fem induzida é

$$\mathcal{E}_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 x_0}{2\pi} \ln\left(\frac{a+L}{a}\right) \frac{dI}{dt} = -\frac{\mu_0 x_0}{2\pi} \ln\left(\frac{a+L}{a}\right) \frac{I_f}{\tau} e^{-t/\tau}.$$

A corrente induzida é

$$\boxed{i_{ind} = \frac{\mathcal{E}_{ind}}{R} = -\frac{\mu_0 x_0}{2\pi R} \ln\left(\frac{a+L}{a}\right) \frac{I_f}{\tau} e^{-t/\tau}}.$$

Como o fluxo está aumentando, de acordo com a lei de Lenz o campo deve ter o sentido contrário do original. Portanto, <u>a corrente induzida deve ser no sentido horário</u>.

(b) Para que a barra fique parada, a resultante das forças deve ser nula. Portanto, $\vec{F}_{ext} = -\vec{F}_{mag}$.

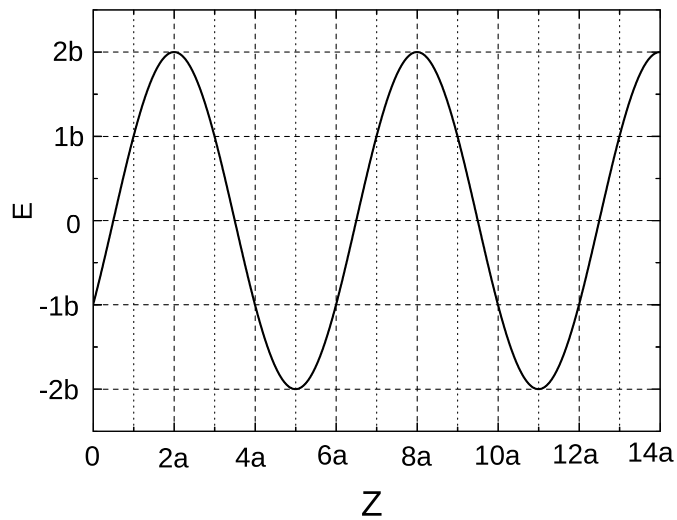
$$\vec{F}_{ext} = -i_{ind} \int_a^{a+L} d\vec{l} \times \vec{B}$$

$$\vec{F}_{ext} = \frac{\mu_0 x_0}{2\pi R} \ln\left(\frac{a+L}{a}\right) \frac{I_f}{\tau} e^{-t/\tau} \int_a^{a+L} \frac{\mu_0 I}{2\pi y} dy\,\widehat{\imath} = \left[\frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{a+L}{a}\right)\right]^2 \frac{x_0 I_f^2}{\tau R} e^{-t/\tau}(1-e^{-t/\tau})\,\widehat{\imath}.$$

$$\boxed{\vec{F}_{ext} = \left[\frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{a+L}{a}\right)\right]^2 \frac{x_0 I_f^2}{\tau R} e^{-t/\tau}(1 - e^{-t/\tau})\,\widehat{\imath}}.$$

Questão 4

Uma onda eletromagnética plana harmônica se propaga no vácuo na direção e sentido positivo do eixo z, sendo que o campo elétrico está na direção do eixo x. A figura abaixo mostra o campo elétrico como função da coordenada z no instante $t = 0$.



(a) (1,0 ponto) Escreva as expressões dos campos elétrico e magnético da onda.

(b) (1,0 ponto) Calcule o vetor de Poynting e a intensidade da onda.

(c) (0,5 ponto) Calcule a densidade média de energia magnética.

Solução da questão 4

(a) A expressão geral do campo elétrico da onda do problema é

$$\vec{E} = E_0 \cos(kz - \omega t + \phi)\widehat{\imath} = E_0 \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(z - ct) + \phi\right]\widehat{\imath} = 2b\cos\left[\frac{\pi}{3a}(z - ct) + \phi\right]\widehat{\imath},$$

onde usamos $k = 2\pi/\lambda$, $\omega = kc$ e obtivemos do gráfico $\boxed{E_0 = 2b}$ e $\boxed{\lambda = 6a}$.

A condição $E(0,0) = 2b\cos\phi = -b \Longrightarrow \phi = 2\pi/3$ ou $4\pi/3$. Mas $E(2a,0) = 2b \Longrightarrow \boxed{\phi = 4\pi/3}$. Assim,

$$\boxed{\vec{E} = 2b\cos\left[\frac{\pi}{3a}(z - ct) + \frac{4\pi}{3}\right]\widehat{\imath}}.$$

O campo magnético é

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\widehat{k} \times \vec{E}}{c} = \frac{2b}{c}\cos\left[\frac{\pi}{3a}(z - ct) + \frac{4\pi}{3}\right]\widehat{\jmath}}.$$

(b) O vetor de Poynting é

$$\boxed{\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \frac{4b^2}{c\mu_0}\cos^2\left[\frac{\pi}{3a}(z - ct) + \frac{4\pi}{3}\right]\widehat{k}}.$$

A intensidade é

$$\boxed{I = < S > = \frac{2b^2}{c\mu_0}}.$$

(c) A densidade média de energia $< u >$ é a soma das densidades médias das energias elétrica $< u_e >$ e magnética $< u_m >$. Além disto, $< u_e > = < u_m >$. Portanto,

$$< u > = < u_e > + < u_m > = 2 < u_m > \Longrightarrow < u_m > = \frac{1}{2} < u > = \frac{1}{2c} < S > = \frac{1}{2c} I$$

$$\Longrightarrow \boxed{< u_m > = \frac{b^2}{c^2\mu_0}}.$$

Formulário

$$\vec{F}=q\vec{E},\quad \vec{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{r^2}\hat{r},\quad V_B-V_A=-\int_A^B\vec{E}\cdot d\vec{\ell},\quad V=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{r},\quad \vec{E}=-\vec{\nabla}V,$$

$$\vec{F}=q\vec{E}+q\vec{v}\times\vec{B},\quad \Phi_B=\int\vec{B}\cdot d\vec{A},\quad d\vec{F}=Id\vec{\ell}\times\vec{B},\quad \vec{\mu}=I\vec{A},\quad \vec{\tau}=\vec{\mu}\times\vec{B},\quad d\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell}\times\vec{r}}{r^3},$$

$$\oint\vec{B}\cdot d\vec{\ell}=\mu_0 I_{int},\quad \oint\vec{E}\cdot d\vec{A}=\frac{q_{int}}{\epsilon_0},\quad \oint\vec{B}\cdot d\vec{A}=0,\quad \mathcal{E}=\oint\vec{E}\cdot d\vec{\ell}=-\frac{d}{dt}\int\vec{B}\cdot d\vec{A}=-\frac{d\Phi_m}{dt},$$

$$\oint\vec{B}\cdot d\vec{\ell}=\mu_0 I+\mu_0\epsilon_0\frac{d}{dt}\int\vec{E}\cdot d\vec{A},\quad I=\int\vec{J}\cdot d\vec{A},\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\epsilon_0},\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0,\quad \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t},\quad \int\frac{tdt}{c-t}=-t-c\,\ln(c-t)\,,\quad \int\frac{tdt}{(c-t)^2}=\frac{c}{c-t}+\ln(c-t)\,.$$

$$\nabla^2\vec{E}=\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2},\quad \nabla^2\vec{B}=\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2},\quad c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}},\quad E=cB,$$

$$\vec{E}=E_m\cos(kx\pm\omega t+\phi)\widehat{e}_y,\quad \vec{B}=B_m\cos(kx\pm\omega t+\phi)\widehat{e}_z,\quad k=\frac{2\pi}{\lambda},\quad \omega=\frac{2\pi}{T},\quad k\,c=\omega,$$

$$f=1/T,\quad \vec{S}=\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B},\quad S=uc,\quad u=u_e+u_m=\frac{\epsilon_0\,E^2}{2}+\frac{B^2}{2\mu_0},\quad I=<S>=\frac{E_m\,B_m}{2\mu_0},$$

$$<\cos^2(kx-\omega t+\phi)>=<\mathrm{sen}^2(kx-\omega t+\phi)>=1/2,\quad <\cos(kx-\omega t+\phi)\,\mathrm{sen}(kx-\omega t+\phi)>=0.$$