

Física III - 4323203
Escola Politécnica - 2017
GABARITO DA P1
20 de abril de 2017

Questão 1

O campo elétrico sobre o eixo de simetria (eixo z) de um anel de raio r e carga total $Q > 0$ é dado por

$$\vec{E}_{anel} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qz}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k}.$$

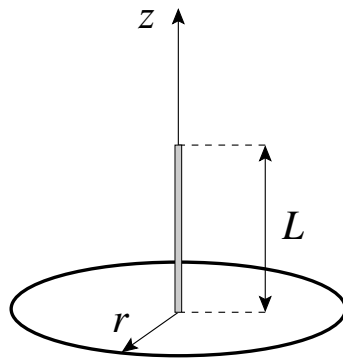


figura 1

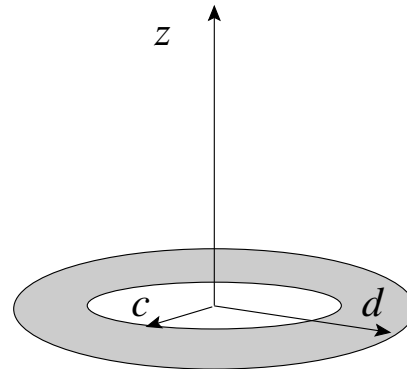


figura 2

- (a) (1,5 ponto) Calcule a força elétrica que o anel exerce sobre um fio retilíneo de comprimento L e densidade linear de carga $\lambda > 0$, posicionado sobre o eixo z , conforme a **figura 1**.
- (b) (1,0 ponto) Calcule o campo elétrico sobre o eixo de simetria (eixo z) de um disco vazado com raio interno c e raio externo d , carregado com uma densidade superficial de carga uniforme $\sigma > 0$, conforme a **figura 2**.

Solução da questão 1

- (a) A força $d\vec{F}$ que o anel exerce sobre um elemento de carga $dq = \lambda dz$ do bastão é dada por

$$d\vec{F} = \vec{E}_{anel}dq = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qz\lambda dz}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k}.$$

A força total sobre o bastão é a soma das forças sobre todos os elementos de carga do bastão:

$$\vec{F} = \int d\vec{F} = \frac{Q\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{zdz}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k} = \frac{Q\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-1}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right]_0^L \hat{k} = \boxed{\frac{Q\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + L^2}} \right] \hat{k}}.$$

- (b) Podemos considerar o disco vazado como uma superposição de anéis concêntricos. Cada anel tem raio r ($c < r < d$) e largura dr , onde r é distância até o eixo do disco. A carga de um destes anéis é

$$dq_{anel} = \sigma 2\pi r dr,$$

sua contribuição para o campo no eixo do disco é

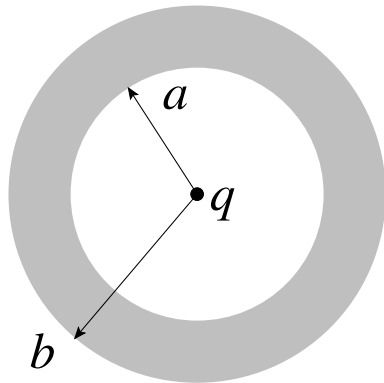
$$d\vec{E}_{anel} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z dq_{anel}}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k} = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k}$$

O campo sobre o eixo do disco é

$$\vec{E}_{disco} = \int d\vec{E}_{anel} = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \int_c^d \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k} = \boxed{\frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{z^2 + c^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + d^2}} \right] \hat{k}}.$$

Questão 2

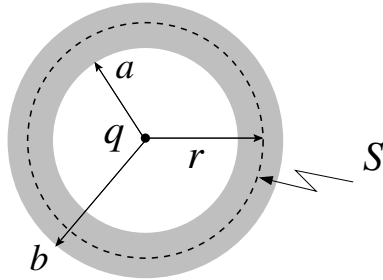
Considere uma casca esférica isolante de raio interno a e raio externo b , conforme a figura. Na região $a < r < b$, a casca esférica tem uma densidade volumétrica de carga $\rho(r) = cr$, onde $c > 0$ e r é a distância até o centro da casca esférica. Coloca-se no centro da casca esférica uma carga q .



- (a) (1,5 ponto) Calcule o vetor campo elétrico na região $a < r < b$.
- (b) (0,5 ponto) Calcule o vetor campo elétrico fora da casca (região onde $r > b$).
- (c) (0,5 ponto) Suponha agora que a casca esférica é condutora ao invés de isolante, com carga total Q . Mantendo a carga q no centro da casca, quais seriam os valores das cargas na superfície interna ($r = a$) e na superfície externa ($r = b$)?

Solução da questão 2

(a) Campo elétrico na região $a < r < b$.



Por simetria, em todo o espaço $\vec{E} = E(r)\hat{r}$.
Usando uma superfície esférica S de raio r ,
concêntrica com a camada, podemos escrever

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint_S E(r)dA = E(r)4\pi r^2 = \frac{q_{in}}{\epsilon_0},$$

onde q_{in} é a carga no interior da superfície S .

$$q_{in} = q + \int_a^r \rho(r)4\pi r^2 dr = q + \pi c \int_a^r 4r^3 dr = \pi c r^4 \Big|_a^r = q + c\pi(r^4 - a^4).$$

$$E(r)4\pi r^2 = \frac{q + c\pi(r^4 - a^4)}{\epsilon_0} \implies E(r) = \frac{q + c\pi(r^4 - a^4)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \implies \boxed{\vec{E}(r) = \frac{q + c\pi(r^4 - a^4)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}}.$$

(b) Campo elétrico na região $r > b$.

Quando $r > b$ a superfície S da figura contém toda a casca esférica e a carga q .
Neste caso

$$q_{in} = q + c\pi(b^4 - a^4) \implies \boxed{\vec{E}(r) = \frac{q + c\pi(b^4 - a^4)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}}.$$

(c) Casca esférica condutora.

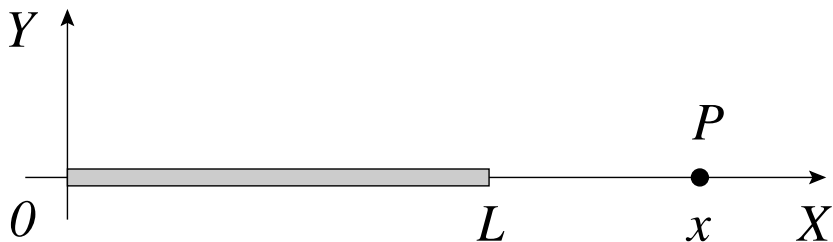
Se a casca esférica for condutora sua carga Q vai se distribuir nas superfícies interna
($r = a$) e externa ($r = b$) de modo a cancelar o campo elétrico no interior da casca
condutora. Novamente, por simetria $\vec{E} = E(r)\hat{r}$ e

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint_S E(r)dA = E(r)4\pi r^2 = \frac{q_{in}}{\epsilon_0},$$

Tomando novamente a superfície S da figura com $a < r < b$ vemos que $E(r) = 0 \implies$
 $q_{in} = 0$ e portanto a carga na superfície interna $\boxed{q(r = a) = -q}$. Como a carga total
na casca é $Q \implies \boxed{q(r = b) = Q + q}$.

Questão 3

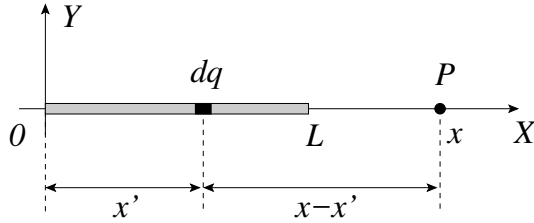
Considere um fio retilíneo de comprimento L , com densidade linear de carga λ , posicionado conforme mostra a figura.



- (a) (1,0 ponto) Calcule o potencial elétrico em um ponto P sobre a parte positiva do eixo X de coordenadas $(x, 0, 0)$, com $x > L$. Assuma o potencial nulo no infinito.
- (b) (1,0 ponto) Calcule a componente E_x do campo elétrico no ponto P .
- (b) (0,5 ponto) Qual é o trabalho de uma força externa para trazer uma carga de prova Q do infinito até o ponto P ?

Solução da questão 3

(a) Potencial no ponto P .



O potencial em P devido ao elemento de carga dq mostrado na figura é

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{x - x'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx'}{x - x'}$$

O potencial devido ao bastão é obtido somando-se sobre as contribuições dos dq :

$$V(x) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{dx'}{x - x'} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \log(x - x') \Big|_0^L = \boxed{-\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \log\left(\frac{x - L}{x}\right)}$$

(b) Componente E_x no ponto P .

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{x - L} - \frac{1}{x} \right) = \boxed{\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{L}{x(x - L)}}$$

(c) Trabalho para trazer a carga Q .

O trabalho W é igual à energia potencial da carga no ponto P.

$$W = QV(x) = \boxed{-\frac{Q\lambda}{4\pi\epsilon_0} \log\left(\frac{x - L}{x}\right)}$$

Questão 4

Um capacitor é constituído de cilindro com raio a e carga $q > 0$ coaxial com uma casca cilíndrica fina de raio b e carga $-q$. O cilindro e a casca cilíndrica têm ambos altura L , conforme a **figura 1**.

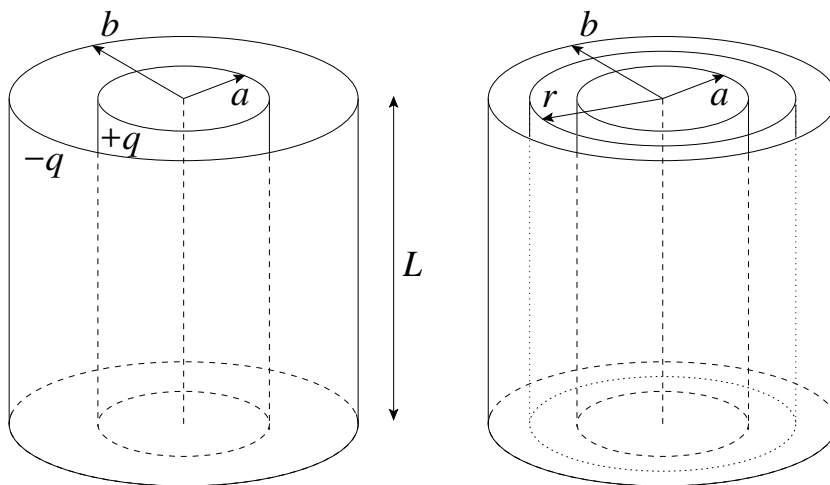


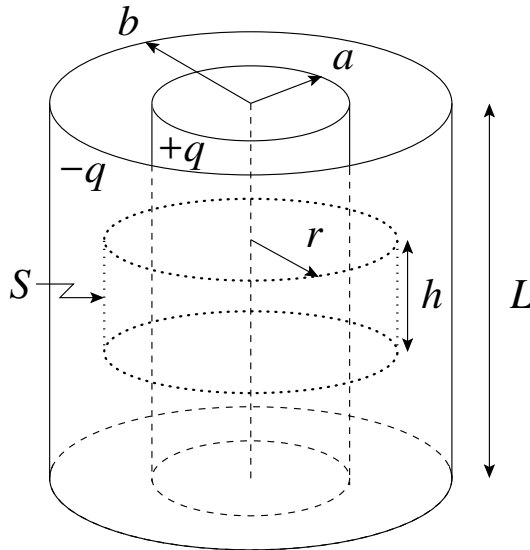
figura 1

figura 2

- (a) (1,0 ponto) Calcule o vetor campo elétrico dentro do capacitor, na região $a < r < b$. Despreze efeitos de borda.
- (b) (1,0 ponto) Calcule a capacitância do capacitor.
- (c) (0,5 ponto) Calcule a energia contida no interior de um cilindro de raio r ($a < r < b$) e altura L , coaxial com o capacitor, conforme a **figura 2**.

Solução da questão 4

(a) Campo no capacitor cilíndrico.



Por simetria o campo é radial e só depende da distância r até o eixo do cilindro, $\vec{E} = E(r)\hat{r}$. Usamos a lei de Gauss com a superfície cilíndrica S concêntrica com o capacitor. Nas tampas do cilindro S $\vec{E} \perp \hat{r}$, assim apenas a superfície lateral do cilindro contribui

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{sup. lat.} E(r) dA = E(r)2\pi r h = \frac{q_{in}}{\epsilon_0},$$

Definindo a carga por unidade de comprimento $\lambda = q/L$, então $q_{in} = \lambda h = qh/L$.

Assim,

$$E(r)2\pi r h = \frac{qh}{\epsilon_0 L} \implies \boxed{\vec{E} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 L r} \hat{r}}.$$

(b) Capacitância C do capacitor cilíndrico.

O módulo V da ddp entre as placas do capacitor é

$$V = \left| -\int_a^b \frac{q}{2\pi\epsilon_0 L r} dr \right| = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 L} \log\left(\frac{b}{a}\right) \implies \boxed{C = \frac{q}{V} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\log(b/a)}}.$$

(c) Energia dentro do cilindro de raio r .

A densidade de energia no campo elétrico é $u_e = \epsilon_0 E^2/2$. Como dentro do cilindro de raio a o campo é nulo (condutor), a energia contida no cilindro de raio r , coaxial com o capacitor, é igual à energia na casca cilíndrica de raios interno a e externo r .

$$\begin{aligned} U(r) &= \int u_e dV = \frac{\epsilon_0}{2} \int_a^r E^2(r')(2\pi r' L dr') = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{2} \int_a^r \left(\frac{q}{2\pi\epsilon_0 L r'}\right)^2 r' dr' \\ &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 L} \int_a^r \frac{1}{r'} dr' = \boxed{\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 L} \log\left(\frac{r}{a}\right)}. \end{aligned}$$

Formulário

$$\vec{F} = \frac{qq'(\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad \vec{F} = q\vec{E}, \quad \vec{E} = \frac{q(\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \hat{r},$$

$$p = qd, \quad \vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}, \quad U = -\vec{p} \cdot \vec{E}, \quad \Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}, \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0},$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}, \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V,$$

$$\Delta U = q\Delta V, \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}, \quad U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i < j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}, \quad C = Q/V,$$

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} = \frac{QV}{2}, \quad u = \frac{\epsilon_0}{2} E^2, \quad u = \frac{dU}{dV},$$

simetria esférica $dV = 4\pi r^2 dr$, simetria cilíndrica $dV = 2\pi r h dr$,

$$\int \frac{xdx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}, \quad \int \frac{dx}{ax + b} = \frac{1}{a} \log(ax + b).$$