Física III - 4323203

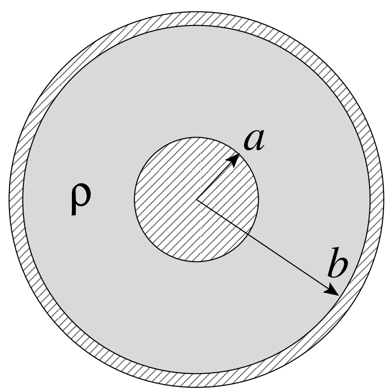
Escola Politécnica - 2017

GABARITO DA P2

25 de maio de 2017

Questão 1

Uma esfera condutora de raio a está no interior de uma casca esférica fina condutora de raio b. A esfera e a casca esférica são concêntricas e o espaço entre elas está preenchido com um material de resistividade ρ constante, conforme a figura. Uma corrente elétrica I, uniformemente distribuída através do material entre os condutores, flui da esfera interna para a casca esférica.



(a) (0,5 ponto) Determine o vetor densidade de corrente $\vec{J}$ na região entre os condutores ($a < r < b$).

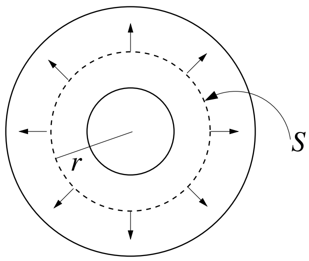
(b) (1,0 ponto) Calcule a diferença de potencial entre os condutores.

(c) (0,5 ponto) Calcule a resistência elétrica entre os condutores.

(d) (0,5 ponto) Calcule a resistência entre os condutores no limite em que $b \to \infty$.

Solução da questão 1

(a) Devido à conservação da carga, a corrente I através de qualquer superfície esférica S de raio r na região entre os condutores é a mesma.



$$I = J(r)4\pi r^2 \Longrightarrow J(r) = \frac{I}{4\pi r^2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{J}(r) = \frac{I}{4\pi r^2}\,\widehat{r}}$$

(b) O campo elétrico entre os condutores é obtido com a lei de Ohm.

$$\vec{J} = \frac{1}{\rho}\vec{E} \Longrightarrow \vec{E} = \rho\vec{J} \Longrightarrow \vec{E} = \frac{\rho I}{4\pi r^2}\,\widehat{r}.$$

A diferença de potencial é

$$V(b) - V(a) = -\int_a^b E(r)dr = -\frac{\rho I}{4\pi}\int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{\rho I}{4\pi}\frac{1}{r}\bigg|_a^b = \frac{\rho I(a-b)}{4\pi ab}$$

O módulo $V \equiv |V(b) - V(a)|$ é

$$\boxed{V = \frac{\rho I(b-a)}{4\pi ab}}$$

(c) A resistência elétrica entre os condutores é

$$\boxed{R = \frac{V}{I} = \frac{\rho(b-a)}{4\pi ab}}.$$

<u>Solução alternativa:</u> a região entre os condutores pode ser considerada como uma superposição de cascas esféricas de espessura dr para as quais vale a lei de Ohm.

$$dR = \rho\frac{dr}{A(r)} = \rho\frac{dr}{4\pi r^2}.$$

A resistência total é

$$R = \rho\int_a^b \frac{dr}{4\pi r^2} = -\frac{\rho}{4\pi}\frac{1}{r}\bigg|_a^b = \frac{\rho(b-a)}{4\pi ab}.$$

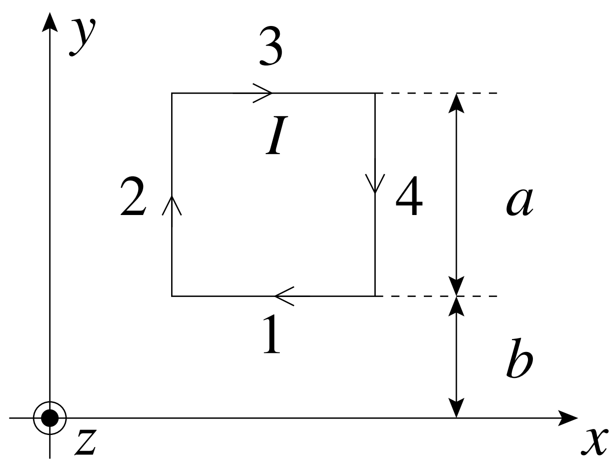
(d) No limite em que $b \to \infty$, $\boxed{R = \rho/4\pi a}$.

Questão 2

Uma espira quadrada de lado a, contida no plano xy, é percorrida por uma corrente I no sentido horário, conforme a figura. Na região onde se encontra a espira existe um campo magnético

$$\vec{B}(y) = \frac{C}{y}\,\widehat{k}\ ,$$

onde $C > 0$ é uma constante.



(a) (1,0 ponto) Calcule a força magnética sobre os lados 1 e 3 da espira.

(b) (1,0 ponto) Calcule a força magnética sobre os lados 2 e 4 da espira.

(c) (0,5 ponto) Calcule a força resultante sobre a espira.

Solução da questão 2

(a) Sobre os lados 1 e 3 da espira $\vec{B}$ é constante portanto $\vec{F} = I\vec{\ell} \times \vec{B}$.

$$\vec{F}_1 = I(-a\,\widehat{\imath}\,) \times (\frac{C}{b}\,\widehat{k}\,) = \boxed{\frac{ICa}{b}\,\widehat{\jmath}}.$$

$$\vec{F}_3 = I(a\,\widehat{\imath}\,) \times (\frac{C}{a+b}\,\widehat{k}\,) = \boxed{-\frac{ICa}{a+b}\,\widehat{\jmath}}.$$

(b) Sobre os lados 2 e 4 da espira $\vec{B}$ é variável.

$$d\vec{F}_2 = I(dy\,\widehat{\jmath}\,) \times (\frac{C}{y}\,\widehat{k}\,) = \frac{ICdy}{y}\,\widehat{\imath}$$

$$\Longrightarrow \vec{F}_2 = IC\int_b^{a+b} \frac{dy}{y}\,\widehat{\imath} = \boxed{IC\ln\left(\frac{a+b}{b}\right)\,\widehat{\imath}}.$$

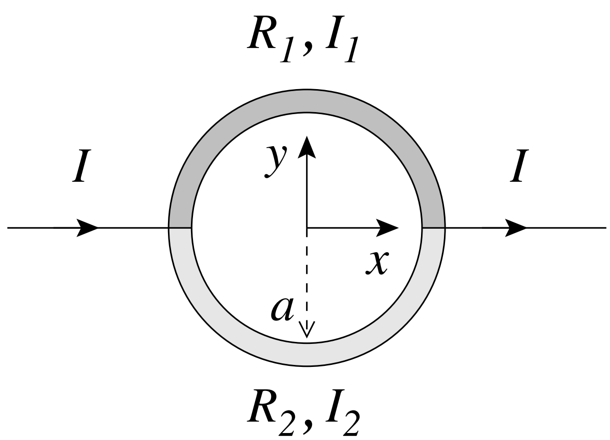
$$d\vec{F}_4 = I(-\,dy\,\widehat{\jmath}\,) \times (\frac{C}{y}\,\widehat{k}\,) = \frac{ICdy}{y}\,\widehat{\imath} = -d\vec{F}_2 \Longrightarrow \boxed{\vec{F}_4 = -\,IC\ln\left(\frac{a+b}{b}\right)\,\widehat{\imath}}.$$

(c) A força total sobre a espira é

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_3 + \vec{F}_2 + \vec{F}_4 = \frac{ICa}{b}\,\widehat{\jmath} - \frac{ICa}{a+b}\,\widehat{\jmath} = \boxed{\frac{ICa^2}{b(a+b)}\,\widehat{\jmath}}.$$

Questão 3

Um resistor circular de raio a contido no plano xy e centrado na origem é feito de duas metades com resistências R_1 e R_2. O resistor está ligado a um par de fios semi-infinitos que se estendem ao longo do eixo x e que são percorridos por uma corrente I, conforme a figura.

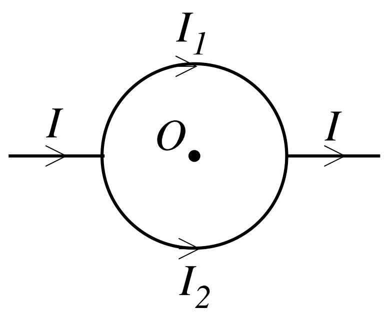


(a) (1,0 ponto) Calcule o valor das correntes I_1 e I_2 que atravessam respectivamente os resistores R_1 e R_2 em função de I, R_1 e R_2. Indique o sentido de cada uma das correntes.

(b) (1,5 ponto) Calcule o vetor campo magnético $\vec{B}$ no centro do resistor circular.

Solução da questão 3

(a) Cálculo das correntes



As ddps entre os extremos do resistor R_1 (semi-círculo superior) e do resistor R_2 (semi-círculo inferior) são iguais

$$\Longrightarrow R_1 I_1 = R_2 I_2.$$

A conservação da carga faz com que $I = I_1 + I_2$. Como a ddp cai ao longo dos resistores, as correntes têm o sentido indicado na figura.

Usando as duas equações acima obtemos

$$\left.\begin{array}{l} I_1 + I_2 = I \\ R_1 I_1 - R_2 I_2 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} I_1 = \dfrac{I R_2}{R_1 + R_2} \\[2ex] I_2 = \dfrac{I R_1}{R_1 + R_2} \end{array}}$$

(b) O campo no centro do resistor é calculado através da lei de Biot-Savart:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \times \widehat{r}}{r^2}.$$

A contribuição dos trechos retilíneos do fio é nula porque nestes trechos $d\vec{\ell} = dx\,\widehat{\imath} \parallel \widehat{r} = \widehat{\imath}$.

Contribuição do resistor R_1. Neste caso,

$$d\vec{\ell} \times \widehat{r} = -\,d\ell\,\widehat{k} \Longrightarrow \vec{B}_1 = -\frac{\mu_0 I_1}{4\pi a^2} \int_{\cap} d\ell\,\widehat{k} = -\frac{\mu_0 I_1}{4\pi a^2}\,\pi a\,\widehat{k} = \boxed{-\frac{\mu_0 I_1}{4a}\,\widehat{k}}.$$

Contribuição do resistor R_2. Neste caso,

$$d\vec{\ell} \times \widehat{r} = d\ell\,\widehat{k} \Longrightarrow \vec{B}_2 = -\frac{\mu_0 I_2}{4\pi a^2} \int_{\cup} d\ell\,\widehat{k} = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi a^2}\,\pi a\,\widehat{k} = \boxed{\frac{\mu_0 I_2}{4a}\,\widehat{k}}.$$

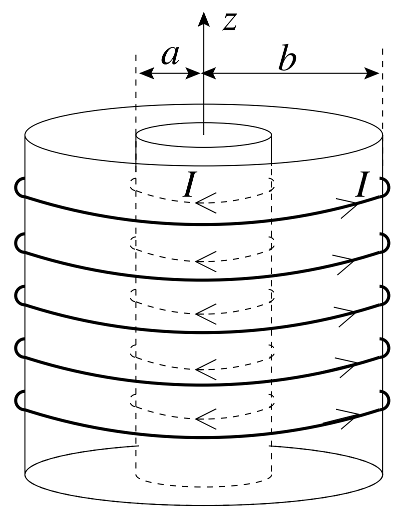
Campo total em O

$$\vec{B}_O = \frac{\mu_0 (I_2 - I_1)}{4a}\,\widehat{k} = \boxed{\frac{\mu_0 I}{4a}\left(\frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2}\right)\,\widehat{k}}.$$

Questão 4

(I) (1,0 ponto) Calcule o módulo do campo magnético produzido por um solenóide muito longo com n espiras por unidade de comprimento, percorrido por uma corrente I. Despreze efeitos de borda.

(II) Dois solenóides muito longos, coaxiais, cujos eixos coincidem com o eixo z, transportam, cada um, uma corrente I porém com sentidos opostos, como mostra a figura. O solenóide de raio a tem n_1 espiras por unidade de comprimento e o de raio b tem n_2 espiras por unidade de comprimento. Despreze efeitos de borda.



(a) (0,5 ponto) Determine o vetor $\vec{B}$ para $0 < r < a$.

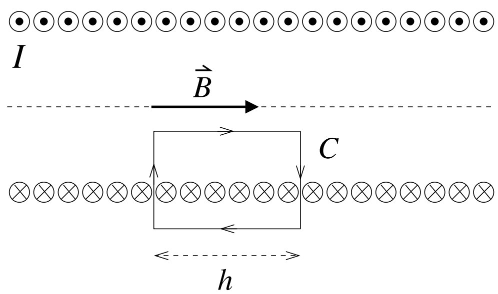
(b) (0,5 ponto) Determine o vetor $\vec{B}$ para $a < r < b$.

(c) (0,5 ponto) Determine o vetor $\vec{B}$ para $r > b$.

Solução da questão 4

(I) Campo magnético de um solenóide.

O campo magnético fora do solenóide é zero. Dentro, o campo é uniforme, tem a direção do eixo do solenóide e o sentido dado pela regra da mão direita. Usando a lei de Ampère com o caminho C obtemos



$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{int} \Rightarrow Bh = \mu_0 nhI$$

$$\Rightarrow \boxed{B = \mu_0 nI}\ .$$

(II) Campo magnético dos dois solenóides.

Usando a regra da mão direita e o resultado do item (I) obtemos o vetor campo magnético no solenóide com raio a:

$$\vec{B}_1 = -\mu_0 n_1 I \widehat{k} \quad \text{para} \quad 0 < r < a$$

e nulo para $r > a$. O vetor campo magnético do solenóide com raio b é

$$\vec{B}_2 = \mu_0 n_2 I \widehat{k} \quad \text{para} \quad 0 < r < b$$

e nulo para $r > b$. Pelo princípio de superposição, o campo devido aos dois solenóides é a soma vetorial do campo de cada um deles.

(a) Vetor $\vec{B}$ para $0 < r < a$.

$$\vec{B} = -\mu_0 n_1 I \widehat{k} + \mu_0 n_2 I \widehat{k} = \boxed{\mu_0 (n_2 - n_1) I \widehat{k}}.$$

(b) Vetor $\vec{B}$ para $a < r < b$.

$$\boxed{\vec{B} = \mu_0 n_2 I \widehat{k}}.$$

(c) Vetor $\vec{B}$ para $r > b$.

$$\boxed{\vec{B} = \vec{0}}.$$

Formulário

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{\ell}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V, \quad dR = \rho\frac{d\ell}{A}, \quad V = RI, \quad \vec{J} = \sigma\vec{E} = \frac{1}{\rho}\vec{E},$$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0, \quad d\vec{F} = Id\vec{\ell}\times\vec{B}, \quad \vec{\mu} = I\vec{A}, \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell}\times\widehat{r}}{r^2}, \quad \oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{int}.$$