Física III - 4323203

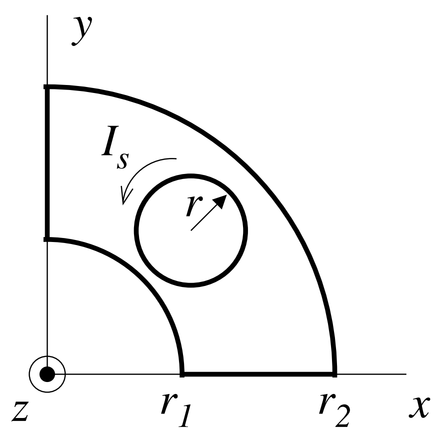
Escola Politécnica - 2017

GABARITO DA P3

6 de julho de 2017

Questão 1

Um circuito com resistência R, contido no plano xy, é constituído por dois arcos de circunferência com raios r_1 e r_2 e por dois segmentos retos. Este circuito envolve um solenóide muito longo, com eixo paralelo ao eixo z, n espiras por unidade de comprimento e raio r tal que $2r < r_2 - r_1$, conforme a figura. Pelo solenóide passa uma corrente I_s que flui no sentido anti-horário. I_s cresce com o tempo com taxa $\beta = dI_s/dt > 0$. Desprezando efeitos de borda, a intensidade do campo magnético no interior do solenóide é $B = \mu_0 n I_S$.



(a) (1,0 ponto) Calcule o fluxo do campo do solenóide através do circuito.

(b) (1,0 ponto) Calcule o coeficiente de mútua indutância entre o solenóide e o circuito.

(c) (1,0 ponto) Calcule o sentido (horário ou anti-horário) e a magnitude da corrente I induzida no circuito.

Solução da questão 1

(a) Como a corrente flui no sentido anti-horário o vetor campo magnético dentro do solenóide é $\vec{B} = \mu_0 n I_s \ \widehat{k}$. O campo é uniforme e o fluxo magnético, adotando a normal ao circuito na direção positiva do eixo z (sentido de percurso anti-horário positivo), é dado por

$$\boxed{\Phi_m = \vec{B} \cdot \vec{A} = \mu_0 n I_s \pi r^2}.$$

(b) O coeficiente de indução mútua é

$$\boxed{M = \frac{\Phi_m}{I_s} = \mu_0 n \pi r^2}$$

(c) O sentido da corrente pode ser determinado pela lei de Lenz. Como o campo dentro do solenóide aumenta com o tempo, o fluxo magnético através do circuito também aumenta. A corrente induzida no circuito gera um campo magnético que vai se opor a este aumento. Portanto, a <u>corrente induzida tem o sentido horário</u>.

Pela lei de Faraday a fem induzida é

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\mu_0 n \frac{dI_s}{dt} \pi r^2 = -\mu_0 n \beta \pi r^2.$$

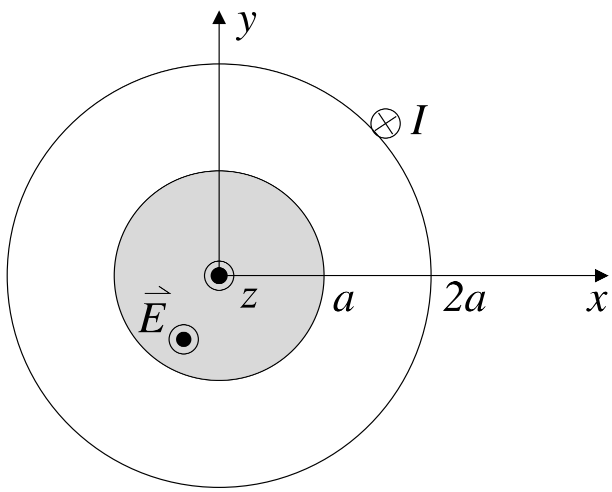
Portanto, a corrente induzida é

$$\boxed{I = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{\mu_0 n \beta \pi r^2}{R}}.$$

Como escolhemos no item (a) o sentido de percurso anti-horário positivo, o sinal de menos indica que a corrente induzida tem o sentido horário, em concordância com a lei de Lenz.

Questão 2

Em uma casca cilíndrica de comprimento infinito, raio $2a$ e coaxial com o eixo z passa uma corrente I, uniformemente distribuída, que flui no sentido de z negativo. No interior desta casca cilíndrica existe uma região cilíndrica (região cinza na figura) também de comprimento infinito, raio a e coaxial com o eixo z onde há um campo elétrico uniforme $\vec{E}(t) = Kt\,\widehat{k}$, onde K é uma constante positiva e t é o tempo.



(a) (1,5 ponto) Desconsiderando a casca cilíndrica por onde passa corrente, calcule o vetor campo magnético em todo o espaço (regiões $r < a$ e $r > a$, onde r é distância ao eixo z).

(b) (1,0 ponto) Determine o vetor campo magnético devido somente à corrente que passa pela casca cilíndrica em todo o espaço.

(c) (1,0 ponto) Calcule o valor da corrente I para que o campo magnético seja nulo para $r > 2a$.

$\boxed{\textbf{Solução da questão 2}}$

(a) Para calcular o vetor campo magnético usamos a lei de Ampère com o termo de corrente de deslocamento.

Campo magnético para $r < a$.

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0\epsilon_0 \frac{d}{dt}\int \vec{E}\cdot d\vec{A} \Longrightarrow 2\pi r B = \mu_0\epsilon_0 \frac{d}{dt}(Kt\pi r^2) \Longrightarrow B = \frac{\mu_0\epsilon_0 K r}{2} \Longrightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0\epsilon_0 K r}{2}\,\widehat{\theta}}.$$

Campo magnético para $r > a$.

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0\epsilon_0 \frac{d}{dt}\int \vec{E}\cdot d\vec{A} \Longrightarrow 2\pi r B = \mu_0\epsilon_0 \frac{d}{dt}(Kt\pi a^2) \Longrightarrow B = \frac{\mu_0\epsilon_0 K a^2}{2r} \Longrightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0\epsilon_0 K a^2}{2r}\,\widehat{\theta}}.$$

(b) Para calcular o campo $\vec{B}$ gerado pela casca cilíndrica usamos a lei de Ampère sem o termo de corrente de deslocamento. Para $r > 2a$,

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I \Longrightarrow 2\pi r B = \mu_0 I \Longrightarrow \vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\widehat{\theta}.$$

Para $r < 2a$ o campo se anula, em resumo

$$\boxed{\vec{B} = \begin{cases} 0 \quad \text{para} \quad r < 2a \\ -\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\widehat{\theta} \quad \text{para} \quad r > 2a \end{cases}}$$

(c) O campo magnético na região $r > 2a$ é a soma dos campos magnéticos encontrados nos itens (a) e (b). Para que ele se anule devemos ter

$$\frac{\mu_0\epsilon_0 K a^2}{2r}\,\widehat{\theta} - \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\widehat{\theta} = \vec{0} \Longrightarrow \boxed{I = \epsilon_0 K a^2 \pi}.$$

Questão 3

A componente magnética da radiação existente no vácuo é dada pela superposição de duas ondas planas:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = -10\cos(3x - 9\times 10^8 t)\,\hat{\jmath} - 10\cos(3x + 9\times 10^8 t)\,\hat{\jmath} \quad \text{(SI)}.$$

Coloque a velocidade da luz $c = 3\times 10^8$ m/s e se necessário deixe suas respostas em função de μ_0.

(a) (1,0 ponto) Calcule o número de onda k e o vetor velocidade de propagação de cada componente de $\vec{B}$.

(b) (1,0 ponto) Determine as correspondentes componentes elétricas $\vec{E}_1$ e $\vec{E}_2$.

(c) (1,0 ponto) Calcule o vetor de Poynting associado a esta radiação.

(d) (0,5 ponto) Esta radiação transporta energia? Justifique.

Solução da questão 3

(a) As duas componentes têm número de onda $\boxed{k = 3 \quad \mathrm{m}^{-1}}$.

A componente $\vec{B}_1$ tem velocidade $\boxed{\vec{v}_1 = \omega/k\, \hat{\imath} = 3 \times 10^8\, \hat{\imath} \quad \mathrm{m/s}}$.

A componente $\vec{B}_2$ tem velocidade $\boxed{\vec{v}_2 = -\omega/k\, \hat{\imath} = -3 \times 10^8\, \hat{\imath} \quad \mathrm{m/s}}$.

(b) As componentes elétricas são obtidas usando que a direção de progagação, $\vec{E}$ e $\vec{B}$ formam um triedro destrógiro. Além disto $E = cB$, portanto

$$\vec{E}_1 = c\vec{B}_1 \times \hat{\imath} = (3 \times 10^8)[-10\cos(3x - 9 \times 10^8 t)\, \hat{\jmath}] \times \hat{\imath} = \boxed{3 \times 10^9 \cos(3x - 9 \times 10^8 t)\, \widehat{k}}$$

$$\vec{E}_2 = c\vec{B}_2 \times (-\hat{\imath}) = (3 \times 10^8)[-10\cos(3x + 9 \times 10^8 t)\, \hat{\jmath}] \times (-\hat{\imath}) = \boxed{-3 \times 10^9 \cos(3x + 9 \times 10^8 t)\, \widehat{k}}$$

(c) O vetor de Poynting é dado por $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{B}/\mu_0$, onde $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ e $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$. Usando as fórmulas de adição e subtração de cossenos obtemos

$$\vec{E} = 3 \times 10^9 \cos(3x - 9 \times 10^8 t)\widehat{k} - 3 \times 10^9 \cos(3x + 9 \times 10^8 t)\widehat{k} = -6 \times 10^9 \operatorname{sen}(3x) \operatorname{sen}(9 \times 10^8 t)\widehat{k}$$

$$\vec{B} = -10\cos(3x - 9 \times 10^8 t)\, \hat{\jmath} - 10\cos(3x + 9 \times 10^8 t)\, \hat{\jmath} = -20\cos(3x)\cos(9 \times 10^8 t)\, \hat{\jmath}$$

$$\boxed{\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B} = -\frac{12 \times 10^{10}}{\mu_0} \operatorname{sen}(3x)\cos(3x)\operatorname{sen}(9 \times 10^8 t)\cos(9 \times 10^8 t)\, \hat{\imath}}.$$

(d) A intensidade da radiação $I = \langle S \rangle$. Como a média temporal $\langle \operatorname{sen}(9 \times 10^8 t)\cos(9 \times 10^8 t) \rangle = 0$, $\boxed{I = 0 \quad \text{e não há transporte de energia}}$. Instantaneamente, pode haver transporte de energia na direção positiva ou negativa do eixo x, mas na média a quantidade de energia transportada é nula.

Formulário

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt}, \quad \Phi^{total} = LI, \quad \Phi_{21}^{total} = M_{21}I_1 = MI_1, \quad u_m = \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad U = \frac{LI^2}{2},$$

$$u_e = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}, \quad \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}, \quad \oint \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0, \quad \mathcal{E} = \oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\cdot d\vec{A} = -\frac{d\Phi_m}{dt},$$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0\epsilon_0 \frac{d}{dt}\int \vec{E}\cdot d\vec{A}, \quad I = \int \vec{J}\cdot d\vec{A}, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}, \quad \nabla^2\vec{E} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}, \quad \nabla^2\vec{B} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}, \quad E = cB,$$

$$\vec{E} = E_m\cos(kx \pm \omega t + \phi)\widehat{e}_y, \quad \vec{B} = B_m\cos(kx \pm \omega t + \phi)\widehat{e}_z, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad k\,c = \omega,$$

$$f = 1/T, \quad \vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}, \quad S = uc, \quad u = u_e + u_m = \frac{\epsilon_0\,E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad I = < S > = \frac{E_m\,B_m}{2\mu_0},$$

$$< \cos^2(kx - \omega t + \phi) > = < \operatorname{sen}^2(kx - \omega t + \phi) > = 1/2, \quad < \cos(kx - \omega t + \phi)\,\operatorname{sen}(kx - \omega t + \phi) > = 0,$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right), \quad \cos A - \cos B = 2\,\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\,\operatorname{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right).$$