# Física III - 4323203

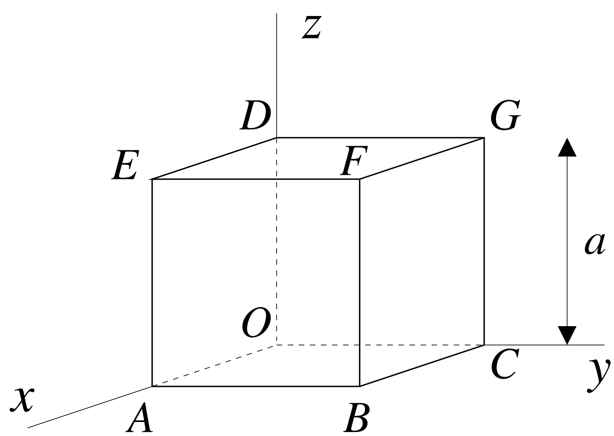
Escola Politécnica - 2017

GABARITO DA PR

**27 de julho de 2017**

## Questão 1

A superfície matemática fechada $S$ no formato de um cubo de lado $a$ mostrada na figura está numa região do espaço onde existe um campo elétrico $\vec{E} = Cz^3\,\widehat{k}$. Use as equações de Maxwell apropriadas para resolver os itens abaixo.




(a) (1,0 ponto) Calcule o fluxo do campo elétrico através das faces do cubo. Quanta carga existe dentro do cubo?

(b) (0,5 ponto) Calcule a densidade de carga dentro do cubo.

(c) (1,0 ponto) Na região em que se encontra o cubo pode existir um campo magnético $\vec{B} = Dx\,\widehat{\imath}$, onde $D > 0$ é uma constante? Justifique.

**Solução da questão 1**

(a) O fluxo do campo elétrico é

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint_S E(z)\,\widehat{k} \cdot \widehat{n}\,dA.$$

As faces laterais do cubo não contribuem porque nelas $\vec{E} \cdot \widehat{n} = 0$. Na face inferior $z = 0 \Rightarrow \vec{E} = \vec{0}$. Assim, apenas a face superior $S_{EFGH}$ contribui para o fluxo.

$$\Phi_e = \int_{S_{EFGH}} Ca^3\,\widehat{k} \cdot \widehat{k}\,dA = Ca^3 \int_{S_{EFGH}} dA = \boxed{Ca^5}.$$

A lei de Gauss relaciona o fluxo do campo elétrico através de $S$ com a carga no volume delimitado por $S$.

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Longrightarrow \boxed{Q = \epsilon_0 \Phi_e = \epsilon_0 C a^5}.$$

(b) A densidade de carga pode ser encontrada usando a lei de Gauss na forma diferencial.

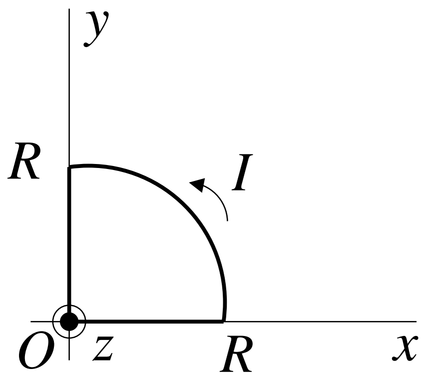
$$\boxed{\rho = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial z} = 3\epsilon_0 C z^2}.$$

(c) Não, um campo magnético da forma $\vec{B} = Dx\,\widehat{\imath}$ viola a lei de Gauss do magnetismo que afirma que $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$. De fato,

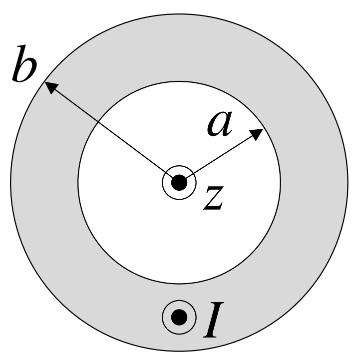
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} = D > 0.$$

## Questão 2

(I) (1,0 ponto) Uma espira plana, contida no plano $xy$, é constituída de um segmento circular de raio $R$ e dois segmentos retos de comprimento $R$, conforme a figura. Pela espira flui no sentido anti-horário uma corrente $I$. Calcule o vetor campo magnético $\vec{B}_O$ produzido pela espira no ponto $O$ (origem do sistema de coordenadas).




(II) A figura abaixo mostra a seção reta de uma casca cilíndrica muito longa de raio interno $a$ e raio externo $b$, coaxial com o eixo $z$. Pela casca flui, na direção positiva do eixo $z$ (direção saindo do papel), uma corrente $I$ uniformemente distribuída através de sua seção reta.




(a) (0,5 ponto) Calcule o vetor densidade de corrente na região $a < r < b$, onde $r$ é a distância ao eixo da casca cilíndrica.

(b) (1,0 ponto) Calcule o vetor campo magnético na região $a < r < b$.

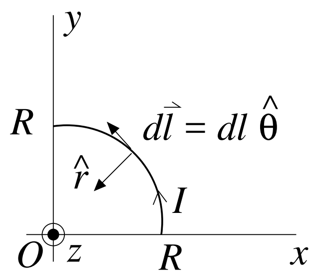
**Solução da questão 2**

(I) Campo magnético da espira

Podemos calcular $\vec{B}_O$ usando a lei de Biot-Savart:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2}.$$

Os trechos retilíneos não contribuem porque neles $d\vec{\ell} \parallel \widehat{r}$. No trecho circular




$d\vec{\ell}\perp\widehat{r}$ e $r^2 = R^2$, portanto

$$\frac{d\vec{\ell}\times\widehat{r}}{r^2} = \frac{d\ell}{R^2}\,\widehat{k}\,.$$

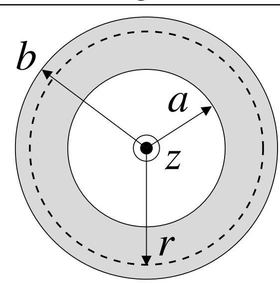
$$\therefore \quad \boxed{\vec{B}_O = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}\int d\ell\,\widehat{k} = \frac{\mu_0 I}{8R}\,\widehat{k}}\,.$$

(II) Campo magnético dentro da casca cilíndrica

(a) Densidade de corrente na região $a < r < b$.

$$\boxed{\vec{J} = \frac{I}{\pi(b^2-a^2)}\,\widehat{k}}.$$

(b) Campo $\vec{B}$ na região $a < r < b$.




Por simetria $\vec{B} = B(r)\ \widehat{\theta}$. Usando a lei de Ampère com o percurso circular de raio $r$ da figura obtemos

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = B(r)2\pi r = \mu_0 I(r) = \mu_0\frac{I}{\pi(b^2-a^2)}\pi(r^2-a^2) \Longrightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I(r^2-a^2)}{2\pi r(b^2-a^2)}\,\widehat{\theta}}.$$

## Questão 3

Um solenóide muito longo, coaxial com o eixo $z$, tem comprimento $\ell$, raio $R$ e $N$ espiras no total. O solenóide é colocado no vácuo. Desprezando efeitos de borda, o campo dentro do solenóide é $B = \mu_0 N I/\ell$, onde $I$ é a corrente através das espiras.

(a) (1,0 ponto) Calcule a indutância $L$ do solenóide.

(b) (1,5 ponto) Uma corrente variável no tempo dada por $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$ percorre o solenóide. Usando a lei de Faraday, calcule o vetor campo elétrico na região $r > R$, onde $r$ é a distância ao eixo do solenóide.

**Solução da questão 3**

(a) O fluxo total do campo magnético através do solenóide é

$$\left.\begin{aligned} \Phi_m &= NB\pi R^2 = \frac{\mu_0 N^2 \pi R^2}{\ell}\, I \\ \Phi_m &= LI \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \boxed{L = \frac{\mu_0 N^2 \pi R^2}{\ell}}.$$

(b) Por simetria o vetor campo elétrico é da forma $\vec{E} = E(r)\,\widehat{\theta}$. Assim,

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\cdot d\vec{A} \Longrightarrow 2\pi r E = -\frac{d}{dt}(B\pi R^2) = \frac{\mu_0 N I_0 \omega \operatorname{sen}(\omega t)\pi R^2}{\ell}$$

$$\Longrightarrow E = \frac{\mu_0 N \omega I_0 \operatorname{sen}(\omega t) R^2}{2\ell r} \Longrightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\mu_0 N \omega I_0 \operatorname{sen}(\omega t) R^2}{2\ell r}\,\widehat{\theta}}.$$

## Questão 4

O campo elétrico de uma onda eletromagnética plana monocromática que se propaga no vácuo é dado por $\vec{E}(z,t) = E_0 \,\mathrm{sen}[2\pi(\beta z + \gamma t)]\,\hat{\imath}$, onde $\beta > 0$ e $\gamma > 0$ são constantes.

(a) (0,5 ponto) Determine a direção e o sentido de propagação da onda. Calcule o comprimento de onda e a frequência desta onda em função das constantes $\beta$ e $\gamma$.

(b) (0,5 ponto) Que relação deve haver entre $\beta$ e $\gamma$ para que o campo $\vec{E}(z,t)$ satisfaça a equação de ondas eletromagnéticas no vácuo.

(c) (0,5 ponto) Expresse o campo magnético $\vec{B}$ em função de $E_0$, $\beta$, $\gamma$ e da velocidade da luz no vácuo $c$.

(d) (1,0 ponto) Calcule o vetor de Poynting instantâneo e a densidade de energia média desta onda.

**Solução da questão 4**

(a) A onda se propaga na direção do eixo $z$ no sentido decrescente. O campo elétrico tem a forma $\vec{E}(z,t) = E_0 \operatorname{sen}(kz + \omega t)\,\hat{\imath}$. Comparando com campo dado $\vec{E}(z,t) = E_0 \operatorname{sen}[2\pi(\beta z + \gamma t)]\,\hat{\imath}$ obtemos

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi\beta \Longrightarrow \boxed{\lambda = \beta^{-1}}, \qquad \omega = 2\pi f = 2\pi\gamma \Longrightarrow \boxed{f = \gamma}$$

(b) A equação do campo de uma onda eletromagnética se propagando no vácuo é

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Substituindo $\vec{E}$ na equação acima obtemos

$$-4\pi\beta^2 E_0 \operatorname{sen}[2\pi(\beta z + \gamma t)]\,\hat{\imath} = \frac{-4\pi\gamma^2}{c^2} E_0 \operatorname{sen}[2\pi(\beta z + \gamma t)]\,\hat{\imath} \Longrightarrow \boxed{\beta = \frac{\gamma}{c}}.$$

(c) O campo $\vec{B}$ é

$$\vec{B} = -\frac{\hat{k}}{c} \times \vec{E}(z,t) = \boxed{-\frac{E_0}{c}\operatorname{sen}[2\pi(\beta z + \gamma t)]\,\hat{\jmath}}.$$

(d) O vetor de Poynting no instante $t$ é

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B} = \boxed{-\frac{E_0^2}{\mu_0 c}\operatorname{sen}^2[2\pi(\beta z + \gamma t)]\,\hat{k}}.$$

A densidade de energia média $< u >$ pode ser obtida através do valor médio de $S$: $< u > = < S > /c$. Assim,

$$\boxed{< u > = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c^2}}.$$

## Formulário

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}, \quad \oint \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0, \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2}, \quad \oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\cdot d\vec{A},$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt}, \quad \Phi^{total} = N\phi_{espira} = LI, \quad \Phi_{21}^{total} = N_2\phi_{espira} = M_{21}I_1, \quad u_m = \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad U = \frac{LI^2}{2},$$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0\epsilon_0\frac{d}{dt}\int \vec{E}\cdot d\vec{A}, \quad I = \int \vec{J}\cdot d\vec{A}, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}, \quad \nabla^2\vec{E} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}, \quad \nabla^2\vec{B} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}, \quad E = cB,$$

$$\vec{E} = E_m\cos(kx \pm \omega t + \phi)\,\widehat{\jmath}, \quad \vec{B} = B_m\cos(kx \pm \omega t + \phi)\,\widehat{k}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad k\,c = \omega,$$

$$f = 1/T, \quad \vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}, \quad S = uc, \quad u = u_e + u_m = \frac{\epsilon_0\,E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad I = < S > = \frac{E_m\,B_m}{2\mu_0},$$

$$< \cos^2(kx-\omega t+\phi) > = < \text{sen}^2(kx-\omega t+\phi) > = 1/2, \quad < \cos(kx-\omega t+\phi)\,\text{sen}(kx-\omega t+\phi) > = 0.$$