Física III - 4323203

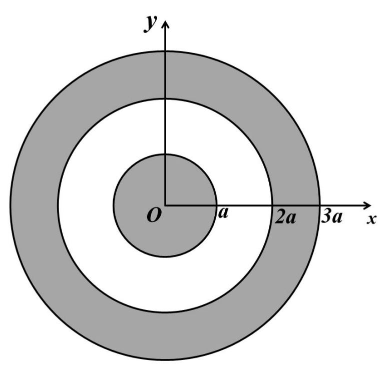
Escola Politécnica - 2017

GABARITO DA PS

13 de julho de 2017

Questão 1

1) Um capacitor esférico é formado por dois condutores em equilíbrio eletrostático. O condutor interno possui formato esférico, de raio a, e está carregado com uma carga total $+Q$. O segundo condutor, de raio interno $2a$ e raio externo $3a$, está carregado com uma carga total $-Q$.



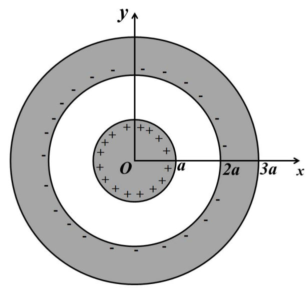
(a) (1,0 ponto) Determine o vetor campo elétrico em todo o espaço e indique como as cargas elétricas estão distribuídas em cada um dos condutores.

(b) (1,0 ponto) Determine o potencial elétrico em todo o espaço. Assuma que o potencial é zero no infinito.

(c) (0,5 ponto) Calcule a capacitância do capacitor.

Solução da questão 1

(a) As cargas elétricas estão concentradas na superfície do condutor, conforme a figura abaixo:



Para $r < a$ e $2a < r < 3a$, o campo elétrico é zero, pois a região está no interior do condutor. O campo elétrico na região $a < r < 2a$ pode ser obtido a partir da lei de Gauss:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Longrightarrow 4\pi r^2 E = \frac{Q}{\epsilon_0} \Longrightarrow \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\widehat{r}.$$

Para $r > 3a$, o campo elétrico é zero, pois utilizando a lei de Gauss para uma superfície gaussiana de raio $r > 3a$, a carga interna total é zero. Portanto:

$$\boxed{\vec{E} = \begin{cases} \vec{0} \quad \text{para} \quad r > 2a \\ \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\widehat{r} \quad \text{para} \quad a < r < 2a \\ \vec{0} \quad \text{para} \quad r < a \end{cases}}$$

(b) A partir do campo elétrico obtido no item anterior, o potencial elétrico é obtido por meio da equação

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

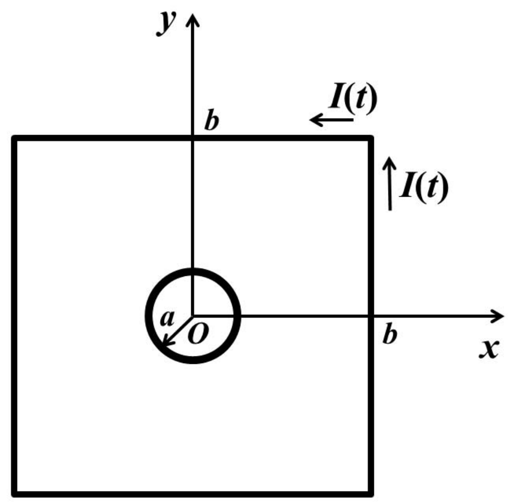
e da continuidade do potencial. Assim,

$$\boxed{V = \begin{cases} 0 \quad \text{para} \quad r \geq 2a \\ \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{2a}\right] \quad \text{para} \quad a \leq r \leq 2a \\ \dfrac{Q}{8\pi\epsilon_0 a} \quad \text{para} \quad r \leq a \end{cases}}$$

(c) A diferença de potencial entre as placas do capacitor é $V = Q/8\pi\epsilon_0 a$. Logo, utilizando a relação $C = Q/V$, obtém-se $\boxed{C = 8\pi\epsilon_0 a}$.

Questão 2

Uma espira quadrada de lado $2b$ é percorrida por uma corrente no sentido anti-horário. A corrente varia com o tempo e é dada por $I(t) = Ct$, onde $C > 0$ é uma constante.



(a) (1,5 ponto) Usando a lei de Biot-Savart calcule o vetor campo magnético produzido pela espira quadrada na origem do sistema de coordenadas.

(b) (1,0 ponto) Considere um anel condutor de raio $a << b$ centrado na origem. Calcule a corrente induzida no anel pela espira quadrada e indique seu sentido. Considere que o anel possui resistência R.

Sugestão: Assuma que o campo magnético produzido pela espira quadrada é uniforme próximo a origem do sistema de coordenadas.

Solução da questão 2

(a) O campo magnético na origem devido ao trecho inferior é calculado através de

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I(t)}{4\pi}\frac{d\vec{\ell}\times\vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 Ct}{4\pi}\,\frac{(dx\,\widehat{\imath})\times(-x\,\widehat{\imath}+b\,\widehat{\jmath})}{(x^2+b^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 Ct}{4\pi}\,\frac{b\;dx}{(x^2+b^2)^{3/2}}\,\widehat{k}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0\, b\, C\, t}{4\pi}\int_{-b}^{b}\frac{dx}{(x^2+b^2)^{3/2}}\,\widehat{k} = \frac{\mu_0\, b\, C\, t}{4\pi}\,\frac{x}{b^2(x^2+b^2)^{1/2}}\bigg|_{-b}^{b} = \frac{\mu_0\, C\, t}{2\pi\sqrt{2}\, b}\,\widehat{k}$$

Pela simetria, o campo magnético produzido pelos quatro lados é obtido multiplicando-se o campo magnético acima por 4, ou seja

$$\boxed{\vec{B} = \frac{2\mu_0\, C\, t}{\pi\sqrt{2}\, b}\,\widehat{k}}$$

(b) Primeiro determinamos a força eletromotriz através da lei de Faraday da indução

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -B\pi a^2 = -\frac{2\mu_0\, C\, a^2}{\sqrt{2}\, b}$$

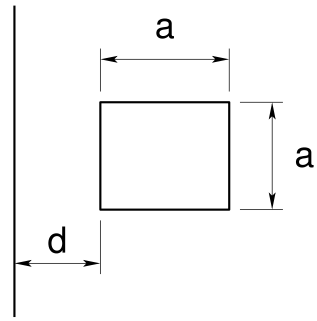
onde adotamos a normal na direção $\widehat{k}$ induzida pelo percurso na direção anti-horária. O sinal de menos mostra que a corrente, dada por

$$\boxed{I_{\text{anel}} = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{2\mu_0\, C\, a^2}{R\sqrt{2}\, b}}\,,$$

possui sentido horário (em concordância com a lei de Lenz).

Questão 3

Uma espira quadrada condutora de lado a e resistência R está orientada paralelamente a um fio condutor infinito a uma distância d.

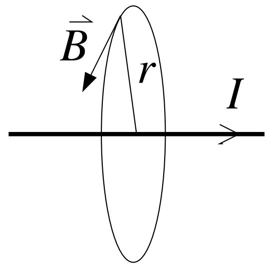


(a) (1,5 ponto) Calcule a indutância mútua do sistema.

(b) (1,0 ponto) Se o fio infinito é percorrido de baixo para cima por uma corrente $I = At$, onde t é o tempo e A é uma constante positiva, calcule a corrente induzida i na espira quadrada. Determine e explique o sentido da corrente induzida.

Solução da questão 3

(a) Vamos calcular o fluxo magnético que o fio produz na espira quadrada. Para isto precisamos do campo magnético produzido pelo fio quando ele é percorrido por uma corrente I.



Por simetria $\vec{B} = B(r)\,\widehat{\theta}$. A lei de Ampère fornece

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \oint B\,d\ell = B(r)\oint d\ell = B2\pi r = \mu_0\,I$$

$$\Longrightarrow \vec{B}(r) = \frac{\mu_0\,I}{2\pi r}\,\widehat{\theta}.$$

O fluxo magnético na espira é

$$\Phi_m = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{A} = \int_d^{d+a}\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\right)(a dr) = \frac{\mu_0 I a}{2\pi}\ln\left(\frac{a+d}{d}\right).$$

A indutância mútua é

$$\boxed{M = \frac{\Phi_m}{I} = \frac{\mu_0 a}{2\pi}\ln\left(\frac{a+d}{d}\right)}.$$

(b) A fem induzida na espira é

$$\mathcal{E} = -M\frac{dI}{dt} = -MA = -\frac{\mu_0 a A}{2\pi}\ln\left(\frac{a+d}{d}\right).$$

Portanto a corrente induzida é em módulo,

$$\boxed{i = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = \frac{MA}{R} = \frac{\mu_0 a A}{2\pi R}\ln\left(\frac{a+d}{d}\right)}.$$

O fluxo magnético na espira produzido pela corrente no fio aumenta para dentro da página. Conforme a lei de Lenz, a fem induzida na espira procura compensar esse aumento produzindo um fluxo magnético para fora da página. Portanto, a <u>corrente induzida é no sentido anti-horário</u>.

Questão 4

Considere uma onda eletromagnética plana que se propaga no vácuo com campo elétrico dado por $\vec{E}(z,t) = E_0 \cos(k\,z - \omega\,t)\,\widehat{\imath}$.

(a) (1,0 ponto) Escreva a expressão para campo magnético correspondente, justificando sua resposta.

(b) (1,0 ponto) Calcule o vetor de Poynting $\vec{S}$ e a intensidade I da onda.

(c) (0,5 ponto) Suponha que essa onda incide normalmente sobre um disco, de raio R, *perfeitamente absorvedor*. Calcule a energia que atravessa o disco num intervalo de tempo igual ao período da onda.

Solução da questão 4

(a) A onda se propaga na direção $\widehat{k}$, $\vec{E} \times \vec{B}$ está na direção de propagação da onda e $|\vec{E}| = c|\vec{B}|$. Portanto,

$$\boxed{\vec{B} = \frac{1}{c}\ \widehat{k} \times \vec{E} = \frac{E_0}{c}\ \cos(k\,z - \omega\,t)\ \widehat{\jmath}}.$$

(b) O vetor de Poynting é

$$\boxed{\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\,\vec{E} \times \vec{B} = \frac{E_0^2}{\mu_0\,c}\cos^2(k\,z - \omega\,t)\,\widehat{k}}.$$

A intensidade da onda $I = \langle S \rangle$

$$I = \langle S \rangle = \frac{E_0^2}{\mu_0\,c}\langle \cos^2(k\,z - \omega\,t)\rangle = \boxed{\frac{1}{2\mu_0 c}\,E_0^2}.$$

(c) O vetor de Poynting fornece a energia por unidade de tempo por unidade de área transportada pela onda, assim a energia U através do disco é

$$U = IAT = \left(\frac{1}{2\mu_0 c}\,E_0^2\right)(\pi R^2)\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = \boxed{\frac{\pi^2 R^2 E_0^2}{\mu_0\,c\,\omega}}.$$

Formulário

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r^2}\hat{r}, \quad V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{\ell}, \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V, \quad \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0},$$

$$C = Q/V, \quad u_e = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}, \quad \oint \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0, \quad d\vec{F} = I d\vec{\ell}\times\vec{B}, \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2},$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+c^2)^{3/2}} = \frac{x}{c^2(x^2+c^2)^{1/2}}, \quad \oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\cdot d\vec{A}, \quad \mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt},$$

$$\Phi^{total} = N\phi_{espira} = LI, \quad \Phi_{21}^{total} = N_2\phi_{espira} = M_{21}I_1, \quad u_m = \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad U = \frac{LI^2}{2},$$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0\epsilon_0\frac{d}{dt}\int \vec{E}\cdot d\vec{A}, \quad I = \int \vec{J}\cdot d\vec{A}, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}, \quad \nabla^2\vec{E} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}, \quad \nabla^2\vec{B} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}, \quad E = cB,$$

$$\vec{E} = E_m\cos(kx \pm \omega t + \phi)\,\widehat{\jmath}, \quad \vec{B} = B_m\cos(kx \pm \omega t + \phi)\,\widehat{k}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad k\,c = \omega,$$

$$f = 1/T, \quad \vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}, \quad S = uc, \quad u = u_e + u_m = \frac{\epsilon_0\,E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad I = < S >,$$

$$< \cos^2(kx-\omega t+\phi) > = < \mathrm{sen}^2(kx-\omega t+\phi) > = 1/2, \quad < \cos(kx-\omega t+\phi)\,\mathrm{sen}(kx-\omega t+\phi) > = 0.$$