Física III - 4323203

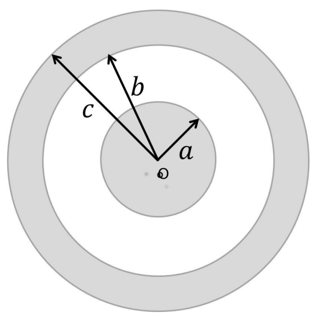
Escola Politécnica - 2018

GABARITO DA P1

12 de Abril de 2018

Questão 1

Um arranjo é formado por uma esfera condutora sólida de raio a, centrada no ponto O na origem, eletrizada com carga $-Q$ envolvida por uma casca esférica condutora de raio interno b e externo c também eletrizada com carga $-Q$, conforme ilustrado na figura abaixo:



(a) (1,5) Sendo r a distância até a origem O, determine o vetor campo elétrico nas regiões $r < a$, $a < r < b$, $b < r < c$ e $r > c$.

(b) (0,5) Determine a carga em cada uma das superfícies $r = a$, $r = b$ e $r = c$ na situação de equilíbrio eletrostático. Justifique sua resposta.

(c) (0,5) Determine as densidades superficiais de carga σ_a, σ_b e σ_c.

Solução da questão 1

(a) (1,5) Usando a lei de Gauss, cuja superfície gaussiana é uma esfera de raio r concêntrica, temos que $\oint \vec{E}.\vec{da} = E.4\pi r^2 = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$, de forma que o vetor campo elétrico aponta na direção radial, especificada pelo versor $\hat{r}$.

• Pelo fato do condutor estar em equilíbrio eletrostático, o campo deve ser nulo no seu interior e portanto $\vec{E} = 0$ para $r < a$. Todo excesso de carga deve estar na superfície do condutor.

• Para $a < r < b$ temos que $q_{int} = -Q$ e portanto $\vec{E} = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}$;

• Para $b < r < c$, o campo também deve ser nulo (interior do condutor) e portanto $\vec{E} = 0$;

• Para $r > c$ temos que $q_{int} = -2Q$ e portanto $\vec{E} = \frac{-2Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}$

(b) (0,5) A carga induzida nas superfícies $r = a$, $r = b$ e $r = c$ são $-Q, +Q$ e $-2Q$, respectivamente.

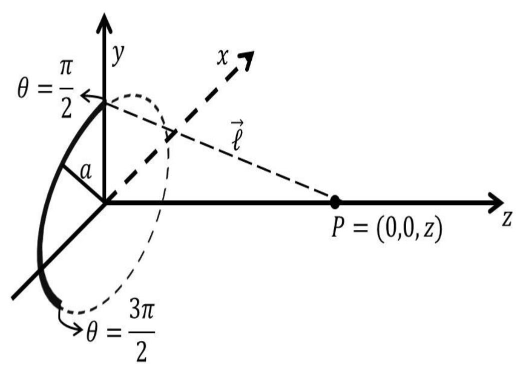
(c) (0,5) Usando o resultado do item anterior, temos que as densidades superficiais de carga σ_a, σ_b e σ_c são dadas por $\sigma_a = \frac{-Q}{4\pi a^2}$, $\sigma_b = \frac{Q}{4\pi b^2}$ e $\sigma_a = \frac{-2Q}{4\pi c^2}$, respectivamente.

Questão 2

Considere um anel com raio a e espessura desprezível que está parcialmente carregado. O centro do anel coincide com a origem do sistema de coordenadas, conforme mostrado na figura abaixo e encontra-se disposto ao longo do plano x-y. A distribuição de carga no anel é dada por:

$$\begin{aligned} & 0 \quad \text{para} \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2 & (1) \\ \lambda(\theta) \;=\; & \lambda \quad \text{para} \quad \pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2 & \\ & 0 \quad \text{para} \quad 3\pi/2 \leq \theta \leq 0, & \\ & & (2) \end{aligned}$$

onde θ é o ângulo polar e λ é um constante positiva. Considere nulo o potencial elétrico no infinito.



(a) (1,5) Determine o vetor campo elétrico no ponto $P = (0, 0, z)$ do eixo do anel.

(b) (1,0) Determine o potencial elétrico no ponto $P = (0, 0, z)$ do eixo do anel.

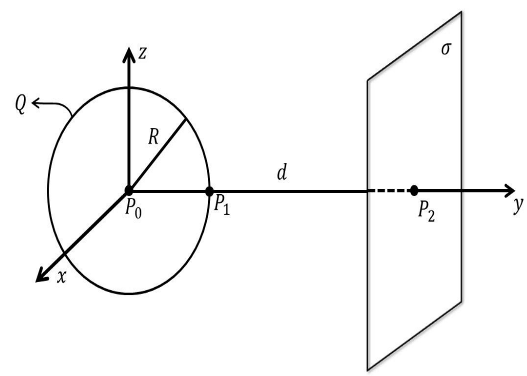
Solução da questão 2

(a) Um elemento de carga dq produz num ponto $P = (0, 0, z)$ do eixo do anel o campo elétrico infinitesimal dado por $d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{(a^2+z^2)^{3/2}}(-a\cos\theta\vec{i} - a\sin\theta\vec{j} + z\vec{k})$. Uma vez que $dq = a\lambda d\theta$ e integrando entre $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\theta = \frac{3\pi}{2}$ obtemos $\vec{E} = \frac{\lambda a}{4\pi\epsilon_0}\frac{2a\vec{i}+\pi z\vec{k}}{(a^2+z^2)^{3/2}}$.

(b) Assumindo que o potencial elétrico é nulo num ponto infinitamente distante de P, podemos escrever a seguinte expressão $dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda a d\theta}{(a^2+z^2)^{1/2}}$. Integrando entre $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\theta = \frac{3\pi}{2}$ obtemos $V = \frac{\lambda a}{4\epsilon_0(a^2+z^2)^{1/2}}$.

Questão 3

Considere uma casca esférica (não condutora) que está centrada na origem P_0. Ela é uniformemente carregada com carga $Q > 0$ e possui raio R, cujo centro situa-se à uma distância $R + d$ de um plano infinito, uniformemente carregado com uma densidade superficial $\sigma > 0$, conforme mostrado na figura abaixo.



(a) (0,5) Determine o vetor campo elétrico em todo o espaço devido à casca esférica.

(b) (0,5) Determine o vetor campo elétrico em todo o espaço devido à carga na superfície plana.

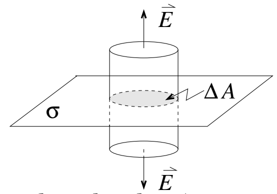
(c) (1,0) Determine o vetor campo elétrico resultante ao longo do eixo $y > 0$.

(d) (0,5) Calcule a diferença de potencial $V_2 - V_0$ entre os pontos P_2 e P_0 localizados na superfície plana e no centro da casca, respectivamente.

Solução da questão 3

(a) Usando a lei de Gauss cuja superfície gaussiana é uma esfera de raio r temos que $\oint \vec{E}.\vec{da} = E.4\pi r^2 = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$, onde o vetor campo elétrico aponta na direção radial. Uma vez que $q_{int} = 0$ no interior da casca, $\vec{E} = 0$ para $r < R$. Para $r \geq R$, $q_{int} = Q$ e portanto $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}$, sendo r a distância a partir do centro da esfera.

(b) Usando a lei de Gauss cuja superfície gaussiana é cilindro infinitesimal (figura abaixo), por simetria o campo $\vec{E}$ é perpendicular ao plano e aponta na direção $\vec{j}$ se $y > d + R$ e $-\vec{j}$ se $y < d + R$.



Além disso, ele só pode em princípio depender da distância até o plano. Portanto, $\vec{E} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{j}$ para $y < d + R$ e $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{j}$ para $y > d + R$.

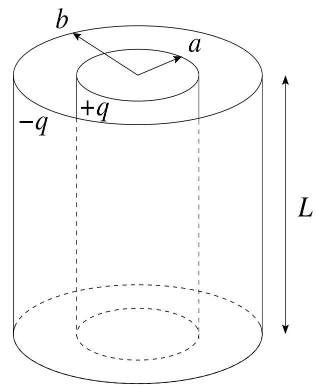
(c) Utilizando o princípio da superposição temos que ao longo da direção y o campo elétrico é dado por

- $\vec{E} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{j}$ para $0 < y < R$
- $\vec{E} = (-\frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 y^2})\vec{j}$ para $R < y < R + d$ e
- $\vec{E} = (\frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 y^2})\vec{j}$ para $R + d < y < \infty$ e

(d) A partir da expressão $V_2 - V_0 = -\int_{P_0}^{P_2} \vec{E}.\vec{dy}$ obtemos que $V_2 - V_0 = -\int_{P_0}^{P_2} \vec{E}.\vec{dy} = \int_0^R \frac{\sigma}{2\epsilon_0}dy + \int_R^{R+d}[\frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 y^2}]dy$. Efetuando as integrais obtemos que $V_2 - V_O = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}(R + d) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}[\frac{1}{R+d} - \frac{1}{R}]$

Questão 4

Considere um capacitor formado por duas cascas cilíndricas metálicas de raios a (interno) e raio b (externo) com cargas $q > 0$ e $q < 0$, respectivamente. Ambos os cilindros são muito longos e possuem comprimento L, de forma que efeitos de borda podem ser desprezados.



(a) (0,5) Calcule a densidade de carga nas superfícies interna e externa do capacitor. Expresse suas respostas em termos de q e das dimensões do sistema.

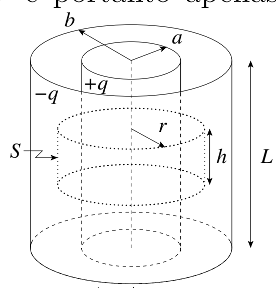
(b) (1,0) Determine o vetor campo elétrico em todo o espaço.

(c) (1,0) Determine a capacitância do capacitor.

Solução da questão 4

(a) A densidade de carga nas superfícies internas e externas são dadas por $\sigma_a = \frac{q}{2\pi a L}$ e $\sigma_b = \frac{-q}{2\pi b L}$.

(b) Adotando como superfície gaussiana S um cilindro de raio r concêntrico ao capacitor e com altura h (figura ao lado) temos que ao longo das tampas do cilindro $\vec{E} \perp \hat{r}$ e portanto apenas a superfície lateral do cilindro contribui para o fluxo.



Portanto $\oint \vec{E}.\vec{da} = E.2\pi r h = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$. Para $r < a$ e $r > b$ temos que $q_{int} = 0$ e $q - q = 0$, respectivamente, de forma que o campo elétrico é nulo nestas regiões. Para $a < r < b$, $q_{int} = +qh/L$ e portanto $\vec{E} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r L}\hat{r}$

(c) A diferença de potencial entre as superfícies interna e externa é dada por $V_a - V_b = -\int_b^a \vec{E}.\vec{dl} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 L}\ln(b/a)$ e portanto a capcitância do capacitor é dada por $C = q/(V_a - V_b) = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(b/a)}$.

Formulário

$$\vec{F} = \frac{qq'(\vec{r} - \vec{r'})}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r'}|^3}, \qquad \vec{F} = q\vec{E}, \quad \vec{E} = \frac{q(\vec{r} - \vec{r'})}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r'}|^3}, \qquad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r^2}\hat{r},$$

$$p = qd, \quad \vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}, \quad U = -\vec{p}\cdot\vec{E}, \quad \Phi_E = \int \vec{E}\cdot d\vec{A}, \quad \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0},$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r'}|}, \quad V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{\ell}, \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V,$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}, \quad U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i<j}\frac{q_i\, q_j}{r_{ij}}, \quad C = Q/V, \quad C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots,$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots, \quad U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} = \frac{QV}{2}, \quad \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \kappa, \quad u = \frac{\epsilon_0}{2}E^2, \quad E = \frac{E_0}{\kappa},$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon}, \quad u = \frac{\epsilon}{2}E^2, \quad \oint \epsilon_0\kappa\vec{E}\cdot d\vec{A} = q_{int-liv},$$

simetria cilíndrica $dV = 2\pi r h dr$, simetria esférica $dV = 4\pi r^2 dr$