Física III - 4323203

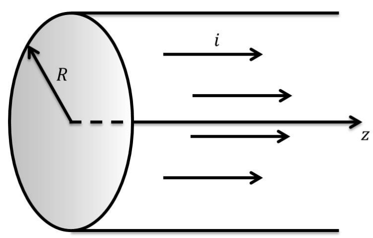
Escola Politécnica - 2017

GABARITO DA P2

17 de maio de 2018

Questão 1

Considere um fio retilíneo muito longo de raio R e centrado ao longo do eixo z no qual passa uma corrente estacionária I (ao longo da direção z), conforme mostra a figura abaixo. A corrente elétrica é distribuída de forma que sua densidade de corrente é dada por: $\vec{J}(r) = Cr\widehat{k}$ (se $0 \leq r \leq R$) e 0 caso contrário, sendo $C > 0$ uma constante.



(a) (0,5 ponto) Determine a corrente total I em função de C e R.

(b) (1,0 ponto) Usando a lei de Ampère, encontre o vetor campo magnético $\vec{B}(r)$ na região $0 \leq r \leq R$.

(c) (1,0 ponto) Usando a lei de Ampère, encontre o vetor campo magnético $\vec{B}(r)$ na região $r > R$.

Solução da questão 1

(a) O elemento de corrente dI atravessando o elemento de área dA relaciona-se com a densidade de corrente $\vec{J}(r)$ por meio da relação $dI = \vec{J}(r).d\vec{A}$, onde $d\vec{A} = 2\pi r dr \widehat{k}$. Efetuando a integração entre 0 e R obtemos $\boxed{I = 2\pi C \int_0^R r^2 dr = \frac{2\pi C}{3} R^3}$.

(b) Uma vez que a corrente é percorrida ao longo da direção z, as linhas de campo magnético formam circunferências concêntricas, cujo vetor $\vec{B}(r)$ aponta tangencialmente em cada ponto da linha, especificados aqui pelo versor $\widehat{\theta}$. Embora a corrente não seja uniforme, ela possui o mesmo valor em todos os pontos situados à uma mesma distância r do fio. Portanto, o lado esquerdo da lei de Ampére ($\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{int}$) é dado por $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B(r).2\pi r$. Para acharmos I_{int} na região $0 \leq r \leq R$ devemos efetuar a integração $I_{int} = 2\pi C \int_0^r r'^2 dr' = \frac{2\pi C}{3} r^3$ e finalmente $\boxed{\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 C r^2}{3} \widehat{\theta}}$ ou $\boxed{\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{r^2}{R^3} \widehat{\theta}}$.

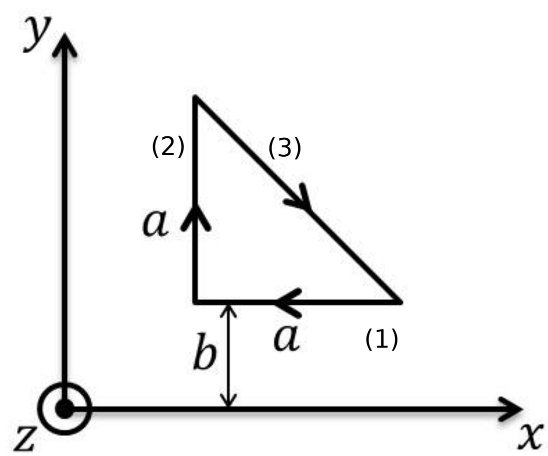
(c) O lado esquerdo da relação $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{int}$ é o mesmo que no item anterior. Neste caso, I_{int} corresponde à toda corrente percorrida. Portanto, $\boxed{\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 C R^3}{3r} \widehat{\theta}}$ ou $\boxed{\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \widehat{\theta}}$.

Questão 2

Uma espira triangular, de base e altura a, contida no plano xy, é percorrida por uma corrente I no sentido horário, conforme a figura. Na região onde se encontra a espira existe um campo magnético

$$\vec{B}(y) = \frac{C}{y}\,\widehat{k}\,,$$

onde $C > 0$ é uma constante.



(a) (1,0 ponto) Calcule o vetor força magnética sobre os lados 1 e 2 da espira.

(b) (1,0 ponto) Calcule o vetor força magnética sobre o lado 3 da espira.

(c) (0,5 ponto) Determine o vetor momento de dipolo magnético e o vetor força resultante sobre a espira.

Solução da questão 2

(a) Sobre o lado 1 da espira $\vec{B}$ é constante portanto $\vec{F} = I\vec{\ell} \times \vec{B}$.

$$\vec{F}_1 = I(-a\,\widehat{\imath}\,) \times (\frac{C}{b}\,\widehat{k}\,) = \boxed{\frac{ICa}{b}\,\widehat{\jmath}}.$$

Sobre o lado 2 da espira $\vec{B}$ é variável.

$$d\vec{F}_2 = I(dy\,\widehat{\jmath}\,) \times (\frac{C}{y}\,\widehat{k}\,) = \frac{ICdy}{y}\,\widehat{\imath}$$

e portanto $\vec{F}_2$ é dada por

$$\boxed{\vec{F}_2 = IC\int_b^{a+b}\frac{dy}{y}\,\widehat{\imath} = IC\ln\left(\frac{a+b}{b}\right)\,\widehat{\imath}.}$$

(b) A força sobre o lado 3 a espira é dada por

$$d\vec{F}_3 = I(dx\,\widehat{\imath} + dy\,\widehat{\jmath}) \times (\frac{C}{y}\widehat{k}) = \frac{ICdy}{y}\,(\widehat{\imath} + \widehat{\jmath}).$$

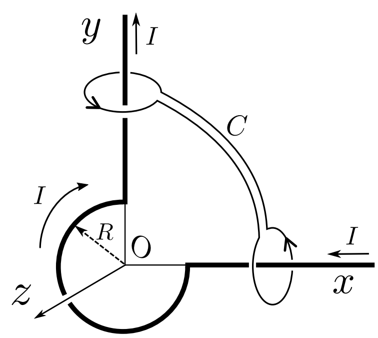
As direções x e y não são independentes ao longo da direção 3, mas que $dx = -dy$. Assim,

$$\boxed{\vec{F}_3 = -IC\ln\left(\frac{a+b}{b}\right)(\widehat{\imath} + \widehat{\jmath});}$$

(c) O momento de dipolo magnético da espira dado por $\vec{\mu} = -\frac{Ia^2}{2}\widehat{k}$. O vetor força resultante é dado por $\boxed{\vec{F}_R = IC(\frac{a}{b} - \ln\frac{a+b}{b})\widehat{\jmath}}$

Questão 3

Um circuito condutor é composto por dois fios retilíneos semi-infinitos e uma parte circular, representados pelas linhas escuras, conforme mostrado na figura abaixo. Ele está contido no plano $x-y$ e conduz uma corrente I no sentido indicado. Para $x \geq R$ e $y \geq R$ os trechos são retilíneos (fios semi-infinitos). Para $x < R$ e $y < R$, o condutor tem a forma de três quartos de circunferência com raio R.



(a) (1,0 ponto) Calcule o vetor campo magnético $\vec{B}$ na origem O devido os segmentos lineares do fio.

(b) (1,0 ponto) Calcule o vetor campo magnético $\vec{B}$ na origem O do sistema de coordenadas devido à parte circular.

(c) (0,5 ponto) Determine o valor da integral $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$ ao longo do percurso C indicado na figura.

Solução da questão 3

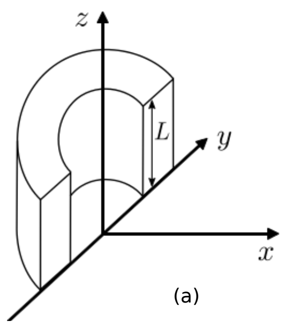
(a) Por meio da lei de Biot-Savart $d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell}\times\vec{r}}{r^3}$, vemos que $d\vec{\ell}$ é sempre paralelo a $\widehat{r}$ ao longo dos trechos retilínenos e portanto $\boxed{\vec{B} = 0}$.

(b) Considerando novamente a lei de Biot-Savart, temos que $d\vec{\ell}\times\vec{r} = -Rdl\widehat{k}$ na origem O em qualquer parte do trecho circular. Uma vez que $dl = Rd\theta$, com θ variando de $\frac{\pi}{2}$ até 2π, obtemos que $\frac{d\vec{\ell}\times\vec{r}}{r^3} = \frac{d\theta}{R}\widehat{k}$. Efetuando a integração, obtemos $\boxed{\vec{B} = -\frac{3\mu_0 I}{8R}\widehat{k}}$.

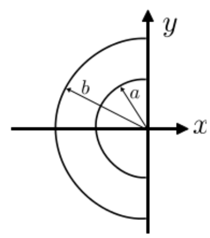
(c) A lei de Ampére estabelece que $\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{int}$. Uma vez que as correntes englobadas pelo circuito C percorrem sentidos contrários, $I_{int} = 0$ e portanto $\boxed{\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = 0}$.

Questão 4

Um material condutor de condutividade σ uniforme tem o formato de um semi-círculo de altura L e raios a e b, conforme indicado na figuras (a) e (b), respectivamente. As superfícies localizadas em $r = a$ e $r = b$ são equipotenciais e mantidas a uma diferença de potencial ΔV por uma bateria. Vamos assumir que o potencial elétrico $V(r)$ dentro do condutor depende somente da coordenada r, de forma que efeitos de borda podem ser desprezados.



(a)



(b)

(a) (1,0 ponto) A bateria fornece uma corrente elétrica I_0. Assumindo a conservação de corrente, determine o vetor densidade de corrente $\vec{J}(r)$.

(b) (0,5 ponto) Determine o vetor campo elétrico $\vec{E}$ no interior do condutor.

(c) (1,0 ponto) Calcule a resistência do condutor.

Solução da questão 4

(a) Uma vez que a corrente elétrica flui ao longo da direção radial, o vetor densidade de corrente $\vec{J}(r) = \frac{I_0}{A}\widehat{r}$ é dado por $\boxed{\vec{J}(r) = \frac{I_0}{\pi L}\frac{1}{r}\widehat{r}}$.

(b) Dada a lei de Ohm $\vec{J} = \sigma\vec{E}$, encontramos $\boxed{\vec{E}(r) = \frac{I_0}{\sigma\pi L}\frac{1}{r}\widehat{r}}$.

(c) Integrando a equação acima ao longo da direção radial, entre $r = a$ e $r = b$, obtemos $|V_b - V_a| = \frac{I_0}{\sigma\pi L}\ln(\frac{b}{a})$ e portanto $\boxed{R = \frac{|V_b - V_a|}{I_0} = \frac{1}{\sigma\pi L}\ln(\frac{b}{a})}$.

Formulário

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{\ell}, \quad I = \frac{dQ}{dt} = n|q|v_d A, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} V, \quad \vec{J} = n|q|\vec{v}_d, \quad \vec{J} = \sigma\vec{E} = \frac{1}{\rho}\vec{E},$$

$$\rho(T) = \rho_0[1+\alpha(T-T_0)], \quad dR = \rho\frac{d\ell}{A}, \quad V = RI, \quad V = \mathcal{E} - Ir, \quad P = VI = I^2R = \frac{V^2}{R},$$

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B}, \quad \Phi_B = \int \vec{B}\cdot d\vec{A}, \quad \oint \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0, \quad d\vec{F} = Id\vec{\ell}\times\vec{B}, \quad \vec{\mu} = I\vec{A},$$

$$\vec{\tau} = \vec{\mu}\times\vec{B}, \quad U = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}, \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2}, \quad \frac{F}{\ell} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}, \quad \oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{int}.$$

$$\text{Coordenadas} \quad \text{polares}: \quad dA = r\,dr\,d\theta$$

Algumas integrais

$$\int \frac{dx}{(c+x^2)^{1/2}} = \log(x+\sqrt{c+x^2}), \qquad \int \frac{dx}{(c+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{c\,(c+x^2)^{1/2}},$$

$$\int \frac{x\,dx}{(c+x^2)^{1/2}} = \sqrt{c+x^2}, \qquad \int \frac{x\,dx}{(c+x^2)^{3/2}} = -\frac{1}{(c+x^2)^{1/2}},$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right), \qquad \int \frac{x\,dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{2}\log(a^2+x^2).$$