Física III - 4323203

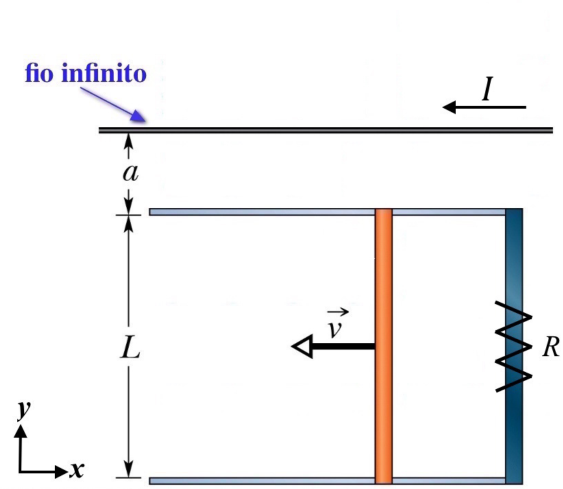
Escola Politécnica - 2018

GABARITO DA P3

28 de junho de 2018

Questão 1

Uma barra condutora vertical de comprimento L sob a ação de uma força externa $\vec{F}_{\text{ext}}$, se move na horizontal com velocidade constante $\vec{v} = -v\hat{i}$, deslizando sem atrito sobre 2 condutores paralelos fixos, formando um circuito fechado com uma terceira barra fixa de resistência R. Simultaneamente, um fio horizontal infinito está paralelo aos dois condutores e a uma distância a do condutor mais próximo. Por este fio passa uma corrente constante I no sentido negativo do eixo x. Sabendo que o módulo do campo magnético produzido por um fio com corrente I a uma distância r é dado por $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, determine:



(a) (1,5 ponto) O módulo da força eletromotriz induzida no circuito.

(b) (0,5 ponto) O sentido da corrente induzida no circuito e justifique sua resposta.

(c) (1,0 ponto) Determine o vetor força externa $\vec{F}_{\text{ext}}$, em termos dos parâmetros geométricos do problema e demais dados no enunciado.

Solução da questão 1

(a) O fluxo magnético pela área do circuito é

$$\Phi_B = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_A B dA = \int_a^{a+L} \frac{\mu_0 I}{2\pi y} x dy = \frac{\mu_0 I x}{2\pi} \ln\left(\frac{a+L}{a}\right).$$

Tendo em vista que $v = dx/dt$, a força eletromotriz induzida é dada por

$$|\epsilon_{\text{ind}}| = \frac{d\Phi_B}{dt} \quad \rightarrow \quad \boxed{|\epsilon_{\text{ind}}| = \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln\left(\frac{a+L}{a}\right)}$$

(b) A área do circuito está aumentando, portanto o fluxo magnético está *aumentando*. Pela Lei de Lenz, a corrente induzida deve produzir um campo magnético que tenda a *diminuir* este fluxo, ou seja na direção oposta ao campo original dentro do circuito. Portanto, a corrente induzida deve ser no **sentido horário**.

(c) A corrente induzida no fio é $I_{\text{ind}} = \frac{\epsilon_{\text{ind}}}{R} = \frac{\mu_0 I v}{2\pi R} \ln\left(\frac{a+L}{a}\right)$. Dessa forma, podemos obter a força magnética no fio dada por

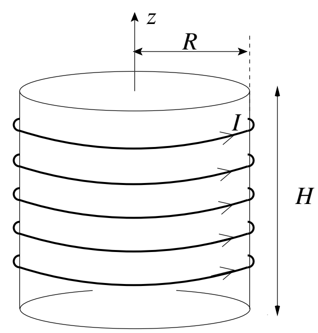
$$F_m = \int dF_m = \int I_{\text{ind}} |d\vec{L} \times \vec{B}| = I_{\text{ind}} \int_a^{a+L} dy \frac{\mu_0 I}{2\pi y} = \frac{\mu_0^2 I^2 v}{4\pi^2 R} \left[\ln\left(\frac{a+L}{a}\right)\right]^2.$$

Pela regra da mão direita, a força magnética aponta para a direita: $\vec{F}_m = F_m \hat{\imath}$. Para que se tenha velocidade constante, é preciso aplicar uma força externa $\vec{F}_{\text{ext}} = -\vec{F}_m$, **para a esquerda**.

Questão 2

<u>Parte I</u>

Considere um solenóide ideal de N espiras, raio R e comprimento $H \gg R$ transportando uma corrente I no sentido indicado pela figura abaixo. O campo magnético em seu interior é dado por $\vec{B} = \frac{\mu_0 N I}{H}\hat{z}$.



(a) (1,0 ponto) Determine a auto-indutância do solenóide.

(b) (1,5 ponto) Considere agora que a corrente elétrica seja variável no tempo $I(t) = at$, sendo $a > 0$ uma constante. Determine **o vetor campo elétrico** induzido nas regiões $r < R$ (dentro do solenóide) e $r > R$ (fora do solenóide).

<u>Parte II</u>

Considere um sistema cujo vetores campo elétrico e magnético são dados por $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z) = (hx + pxyt, 0, 0)$ e $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z) = (ay, 0, bxt^2)$, respectivamente onde h, p, a, b são constantes e (x, y, z) denotam coordenadas cartesianas. Usando as equações de Maxwell, determine:

(c) (0,5 ponto) A densidade de carga do sistema.

(d) (1,0 ponto) O vetor densidade de corrente $\vec{J}$ do sistema.

Solução da questão 2

Parte I

(a) O fluxo do campo magnético sobre as N espiras do solenóide é: $\phi_B = N \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = N\left(\frac{\mu_0 I N}{H}\right)\pi R^2 = \frac{\mu_0 I N^2 \pi R^2}{H}$ Portanto a auto-indutância L é dada por $L = \phi_B / I \quad \rightarrow$ $\boxed{L = \dfrac{\mu_0 N^2 \pi R^2}{H}}$.

(b) O campo elétrico é calculado através da lei de Faraday:

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B} \cdot d\vec{A}\,.$$

O problema tem simetria cilíndrica. Escolhendo o eixo do solenóide como sendo o eixo z e com o sentido igual ao do campo magnético, podemos escrever

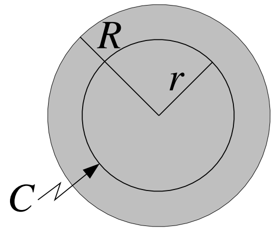
$$\vec{B}(t) = \begin{cases} \mu_o \dfrac{N}{H} I(t)\,\hat{z} & \text{no interior do solenóide} \\ 0 & \text{no exterior do solenóide}\,. \end{cases}$$

Usaremos como percurso C um círculo centrado no eixo do solenóide cujo plano é perpendicular ao eixo. Neste percurso, por simetria, $\vec{E} = E(r)\hat{\varphi}$ e $d\vec{\ell} = d\ell\,\hat{\varphi}$. Portanto,

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = E(r)\oint_C d\ell = E(r) 2\pi r\,.$$

O resultado acima vale dentro e fora do solenóide.

(a) Campo elétrico dentro do solenóide ($r < R$).

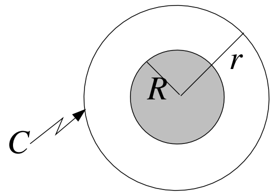


Neste caso o percurso C fica dentro do solenóide $\Rightarrow \Phi = B\pi r^2$. Tendo em vista que $\dfrac{dI(t)}{dt} = a$, temos que

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = E(r) 2\pi r = -\mu_o \frac{N}{H}\frac{dI(t)}{dt}\,\pi r^2$$

$$\vec{E}(r) = -\frac{\mu_o N}{2H} a\, r \hat{\varphi}$$

(b) Campo elétrico fora do solenóide ($r > R$).



Neste caso o percurso C fica fora do solenóide $\Rightarrow \Phi = B\pi R^2$. Assim,

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = E(r) 2\pi r = -\mu_o \frac{N}{L} a\, \pi R^2$$

$$\vec{E}(r) = -\frac{\mu_o N R^2}{2Hr} a\hat{\varphi}.$$

Parte II

(a) Da Lei de Gauss $\rho = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$, obtemos por diferenciação que $\rho = \epsilon_0 (h + pyt)$ e portanto $\boxed{\rho = \epsilon_0 (h + pyt)}$.

(b) Tendo em vista as relações $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}, \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}, \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) = (0, -bt^2, -a)$ e $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \left(\frac{\partial E_x}{\partial t}, \frac{\partial E_y}{\partial t}, \frac{\partial E_z}{\partial t} \right) = (pxy, 0, 0)$, usando a Lei de Ampère-Maxwell $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$ obtemos $\boxed{\vec{J} = \left(-\epsilon_0 pxy, -\frac{bt^2}{\mu_0}, -\frac{a}{\mu_0} \right)}$

Questão 3

O campo magnético de uma onda eletromagnética se propagando no vácuo é dado por $\vec{B} = B_0 \sin[k(x + ct)]\hat{z}$. **Expresse suas respostas apenas em termos de dados do problema e constantes universais.**

(a) (1,0 ponto) Determine o *vetor* campo elétrico desta onda. Justifique sua resposta por meio de um esquema gráfico dos vetores pertinentes.

(b) (1,0 ponto) Determine o *vetor* de Poynting desta onda.

(c) (1,0 ponto) Determine a energia total transportada pela radiação através de uma área A perpendicular à frente de onda durante um intervalo de tempo igual a 4 vezes o período da onda.

Solução da questão 3

(a) Uma vez que a onda se propaga com vetor velocidade $\vec{c} = -c\hat{i}$,, o vetor campo elétrico é dado por $\boxed{\vec{E} = -cB_0 \sin[k(x+ct)]\hat{j},}$.

(b) O vetor de Poynting é dado por $\vec{S} = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0}$, de onde obtemos a seguinte expressão $\boxed{\vec{S} = -\frac{cB_0^2}{\mu_0}\sin^2[k(x+ct)]\hat{i},}$.

(c) O período da onda é dado por $T = 2\pi/\omega = 2\pi/kc$ e portanto $4T = 8\pi/kc$. A densidade de energia é dada por $u = \frac{|\vec{S}|}{c}$, de forma que a energia dU contida num volume infinitesimal dV com área A é dada por $dU = uAcdt = A|\vec{S}|dt$. Integrando a relação acima entre os instantes 0 e $4T$, obtemos que a energia transportada pela onda é dada por $U = A\,\frac{cB_0^2}{2\mu_0}\,\frac{8\pi}{kc}$ e portanto $\boxed{U = \frac{4\pi A B_0^2}{\mu_0 k}}$.

Formulário

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt}, \quad d\vec{F} = Id\vec{\ell}\times\vec{B}, \quad \Phi^{total} = LI, \quad \Phi_{21}^{total} = M_{21}I_1 = MI_1, \quad u_m = \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad U = \frac{LI^2}{2},$$

$$u_e = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}, \quad \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}, \ \oint \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0, \ \mathcal{E} = \oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\cdot d\vec{A} = -\frac{d\Phi_m}{dt},$$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0\epsilon_0\frac{d}{dt}\int \vec{E}\cdot d\vec{A}, \quad I = \int \vec{J}\cdot d\vec{A}, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}, \quad \nabla^2\vec{E} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}, \quad \nabla^2\vec{B} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}, \quad E = cB,$$

$$\vec{E} = E_m\cos(kx\pm\omega t+\phi)\hat{j}, \quad \vec{B} = B_m\cos(kx\pm\omega t+\phi)\hat{k}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad k\,c = \omega,$$

$$f = 1/T, \quad \vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}, \quad S = uc, \quad u = u_e + u_m = \frac{\epsilon_0\,E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad I =< S >= \frac{E_m\,B_m}{2\mu_0},$$

$$< \cos^2(kx-\omega t+\phi) >=< \text{sen}^2(kx-\omega t+\phi) >= 1/2, \quad < \cos(kx-\omega t+\phi)\,\text{sen}(kx-\omega t+\phi) >= 0,$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right), \quad \cos A - \cos B = 2\,\text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\,\text{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right).$$