Física III - 4323203

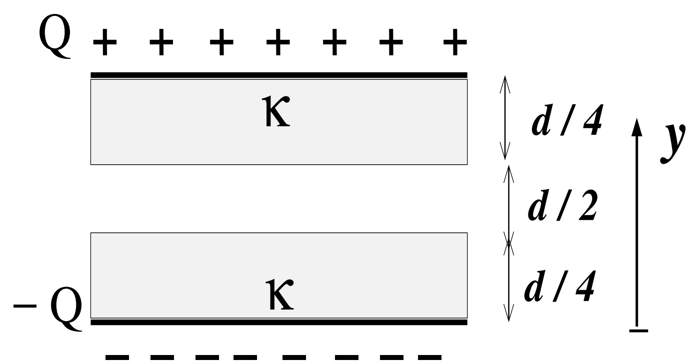
Escola Politécnica - 2018

GABARITO DA REC

26 de Julho de 2018

Questão 1

Considere um capacitor de placas paralelas, formado por duas placas com área A carregadas com cargas Q e $-Q$, cujo o espaço entre elas está preenchido com duas camadas de dielétricos de constante dielétrica κ, conforme indicado na figura abaixo. Despreze efeitos de borda.



(a) (1,0) Usando a lei de Gauss, obtenha o vetor campo elétrico $\vec{E}$ na região do capacitor sem o dielétrico $d/4 < y < 3d/4$. Obtenha em seguida $\vec{E}$ nas regiões $0 < y < d/4$ e $3d/4 < y < d$.

(b) (1,0) Obtenha a diferença de potencial entre as placas e capacitância do sistema.

(c) (0,5) Determine a energia armazenada no capacitor.

Solução da questão 1

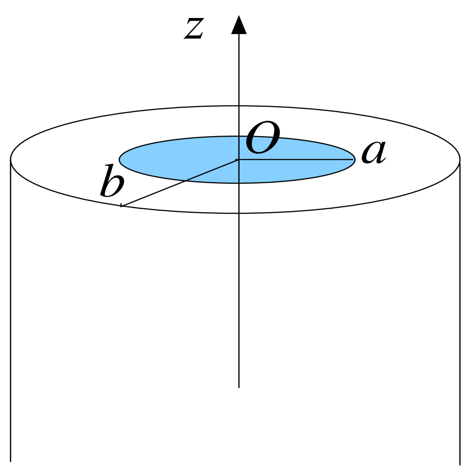
(a) Nas regiões com ($0 < y < d/4$ e $3d/4 < y < d$) e sem ($d/4 < y < 3d/4$) dielétrico, o vetor campo elétrico é dado por $\vec{E} = -\frac{Q}{A\kappa\epsilon_0}\vec{j}$ e $\vec{E} = -\frac{Q}{A\epsilon_0}\vec{j}$, respectivamente.

(b) A diferença de potencial entre as placas $\Delta V = -\int\limits_O^d \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = \frac{Qd}{2A\kappa\epsilon_0} + \frac{Qd}{2A\epsilon_0} = \frac{Qd}{2A\epsilon_0}(\frac{1}{\kappa}+1)$. Uma vez que a capacitância é definida por $C = Q/\Delta V$, obtemos finalmente $C = \frac{2A\kappa\epsilon_0}{(k+1)d}$.

(c) A energia armazenada no capacitor pode ser calculada a partir da expressão $U = \frac{Q^2}{2C}$ e portanto obtemos $U = \frac{Q^2(\kappa+1)d}{4A\kappa\epsilon_0}$.

Questão 2

Um fio muito longo de raio a, ao longo do eixo z, está envolto em uma casca cilíndrica de raio b (com espessura desprezível) formando um cabo coaxial. No fio há uma densidade de corrente uniforme $\vec{J} = J_0\vec{k}$ e na casca a corrente elétrica também se distribui uniformemente, de forma que a densidade é dada por $\vec{M} = -M_0\vec{k}$, sendo J_0 e M_0 constantes positivas.



(a) (1,0) Calcule o vetor campo magnético $\vec{B}$ em qualquer ponto da região $0 < r < a$, sendo r a distância do ponto até a origem O.

(b) (1,0) Calcule o vetor campo magnético $\vec{B}$ na região $a < r < b$.

(c) (0,5) Calcule o vetor campo magnético $\vec{B}$ na região $r > b$.

Solução da questão 2

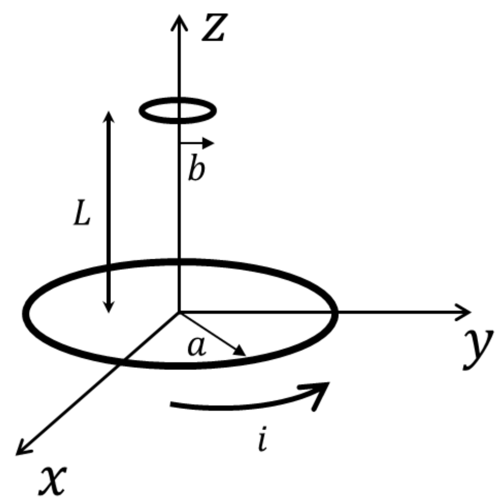
(a) Uma vez que a corrente é percorrida ao longo da direção z, as linhas de campo magnético formam circunferências concêntricas, cujo vetor $\vec{B}(r)$ aponta tangencialmente em cada ponto da linha, especificados aqui pelo versor $\widehat{\theta}$. Portanto, o lado esquerdo da lei de Ampére ($\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{int}$) é dado por $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B(r).2\pi r$. Uma vez que a corrente elétrica se distribui uniformemente ao longo de $0 < r < a$, a corrente englobada I_{int} é dada por $I_{int} = J_0 \pi r^2$ e finalmente $\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 J_0}{2} r \widehat{\theta}$.

(b) O lado esquerdo da relação $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{int}$ é o mesmo que no item anterior. Neste caso, I_{int} corresponde à toda corrente englobada entre $0 < r < a$, dada por $I_{int} = J_0 \pi a^2$. Portanto, $\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 J_0 a^2}{2r} \widehat{\theta}$.

(c) Para $r > b$, a corrente englobada é dada por $I_{int} = J_0 \pi a^2 - 2M_0 \pi b$ e portanto $\vec{B}(r) = \frac{\mu_0}{2r}(J_0 a^2 - 2M_0 b)\widehat{\theta}$.

Questão 3

Uma espira circular de raio a, com seu centro na origem do sistema de coordenadas, está localizada no plano xy e transporta uma corrente I ao longo de seu comprimento. Outra espira circular, de raio $b << a$, está a uma distância L da origem conforme mostra a figura abaixo.



(a) (1,0) Determine o vetor campo magnético produzido pela espira inferior em ponto do eixo z situado a uma distância L da origem.

(b) (0,5) Obtenha a indutância mútua entre as espiras.

(c) (1,0) Considerando que as duas espiras possuem resistência R e que a corrente elétrica I na espira de raio a agora varia no tempo de acordo com a relaçao $I = kt$, sendo $k > 0$ uma constante, determine o módulo e o sentido da corrente induzida na espira de raio b.

Solução da questão 3

(a) Um elemento de corrente $d\vec{l}$ da espira inferior irá distar de $r = \sqrt{a^2 + L^2}$ do centro da espira superior. Usando a lei de Biot-Savart, temos que o vetor campo magnético produzido por este elemento irá apontar na direção $+\vec{k}$. Assim $\vec{B} = \frac{\mu_0 I a^2}{2} \frac{1}{(a^2+L^2)^{3/2}} \vec{k}$.

(b) A mútua indutância M é dada por $M = \frac{\Phi}{I}$, sendo $\Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$ o fluxo magnético devido à espira inferior. Uma vez que $b << a$, podemos considerar o campo magnético uniforme em $z = L$. Portanto, temos $\Phi = \frac{\mu_0 I a^2}{2} \frac{1}{(a^2+L^2)^{3/2}} \pi b^2$, de onde obtemos $M = \frac{\mu_0 \pi a^2 b^2}{2(a^2+L^2)^{3/2}}$.

(c) A força eletromotriz induzida é calculada por meio da Lei de Faraday: $\epsilon_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi}{dt}$, de onde obtemos que $I_{\text{ind}} = \frac{\epsilon_{\text{ind}}}{R} = \frac{\mu_0 k \pi a^2 b^2}{2R(a^2+L^2)^{3/2}}$. De acordo com a Lei de Lenz, a corrente induzida está dirigida no sentido horário.

Questão 4

Suponha que o campo elétrico de uma onda eletromagnética plana, propagando-se no vácuo na ausência de cargas e correntes, seja dado pela expressão

$$\vec{E} = (\vec{i}E_0 + \vec{k}E_1)\sin(az + bt),$$

onde E_0, E_1 , a e $b > 0$ são constantes.

(a) (1,0) Usando a equação de Maxwell apropriada, determine E_1.

(b) (0,5) Partindo da equação de onda satisfeita por $\vec{E}$ determine a relação entre as constantes a e b.

(c) (0,5) Obtenha a expressão para o campo magnético $\vec{B}$.

(d) (0,5) Determine o vetor de Poynting $\vec{S}$ e a intensidade da onda.

Solução da questão 4

(a) Da Lei de Gauss $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, obtemos por diferenciação que $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\partial}{\partial z}[E_1 \sin(az + bt)] = aE_1 \cos(az + bt) = 0$, pois não há cargas livres. Uma vez que a relação acima deve valer para todo z e t, isto implica que $E_1 = 0$.

(b) Dada a equação de onda $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$ e diferenciando a expressao $\vec{E} = E_0 \sin(az + bt)\vec{i}$ obtemos que $a^2 - \mu_0\epsilon_0 b^2 = 0$ para qualquer z e t e portanto, $\frac{a}{b} = \frac{1}{c} = \sqrt{\mu_0\epsilon_0}$.

(c) A onda (plana) se propaga na direção z com velocidade $\vec{c} = -c\vec{k}$. O campo magnético é portanto dado por $\vec{B} = -\frac{\vec{k}}{c} \times \vec{E}$, de onde obtemos a expressão $\vec{B} = -\frac{E_0}{c} \sin(az + bt)\vec{j}$

(d) A expressão para o vetor de Poynting é dada por $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B}$, de forma que $\vec{S} = -\frac{E_0^2}{c\mu_0} \sin^2(az+bt)\vec{k}$. A intensidade da onda I é dada por $I = <|\vec{S}|> = \frac{E_0^2}{2c\mu_0}$.

Formulário

$$\vec{F} = \frac{qq'(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3}, \qquad \vec{F} = q\vec{E}, \quad \vec{E} = \frac{q(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3}, \qquad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r^2}\hat{r}, \qquad V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|},$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V, \quad U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i<j}\frac{q_i\,q_j}{r_{ij}}, \quad dA = 2\pi r dr(\text{coordenadas} \quad \text{polares})$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\ldots, \quad U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} = \frac{QV}{2}, \quad \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \kappa, \quad u = \frac{\epsilon_0}{2}E^2, \quad E = \frac{E_0}{\kappa},$$

$$W = q\Delta V, \quad V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{\ell}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V, \quad d\vec{F} = Id\vec{\ell}\times\vec{B}, \quad \vec{\mu} = I\vec{A},$$

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}, \quad \oint \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0, \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2}, \quad \oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\cdot d\vec{A},$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt}, \quad \Phi^{total} = N\phi_{espira} = LI, \quad \Phi_{21}^{total} = N_2\phi_{espira} = M_{21}I_1, \quad u_m = \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad U = \frac{LI^2}{2},$$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0\epsilon_0\frac{d}{dt}\int \vec{E}\cdot d\vec{A}, \quad I = \int \vec{J}\cdot d\vec{A}, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}, \quad \nabla^2\vec{E} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}, \quad \nabla^2\vec{B} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}, \quad E = cB,$$

$$\vec{E} = E_m\cos(kx\pm\omega t+\phi)\,\widehat{\jmath}, \quad \vec{B} = B_m\cos(kx\pm\omega t+\phi)\,\widehat{k}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad k\,c = \omega,$$

$$f = 1/T, \quad \vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}, \quad S = uc, \quad u = u_e + u_m = \frac{\epsilon_0\,E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad I = < S > = \frac{E_m\,B_m}{2\mu_0},$$

$$< \cos^2(kx-\omega t+\phi) > = < \text{sen}^2(kx-\omega t+\phi) > = 1/2, \quad < \cos(kx-\omega t+\phi)\,\text{sen}(kx-\omega t+\phi) > = 0.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}), \quad \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sqrt{x^2+a^2}.$$