Física III - 4323203

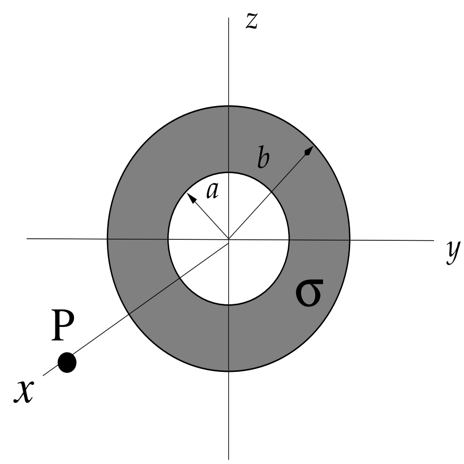
Escola Politécnica - 2018

GABARITO DA SUB

05 de Julho de 2018

Questão 1

Um disco vazado, com raios interno a e externo b, respectivamente, tem espessura desprezível e está carregado eletricamente ao longo do plano $y - z$ com uma densidade superficial dada por $\sigma(r) = C/r$, onde r é a distância ao centro do disco e $C > 0$ uma constante.



(a) (0,5) Calcule a carga total do disco.

(b) (1,0) Considere um ponto P qualquer situado sobre o eixo $x > 0$. Calcule o potencial elétrico $V(x)$ em P. Assuma que o potencial elétrico é nulo num ponto infinitamente distante de P.

(c) (1,0) Determine o trabalho de um agente externo necessário para deslocar uma carga puntiforme q situada em P até o centro do anel.

Solução da questão 1

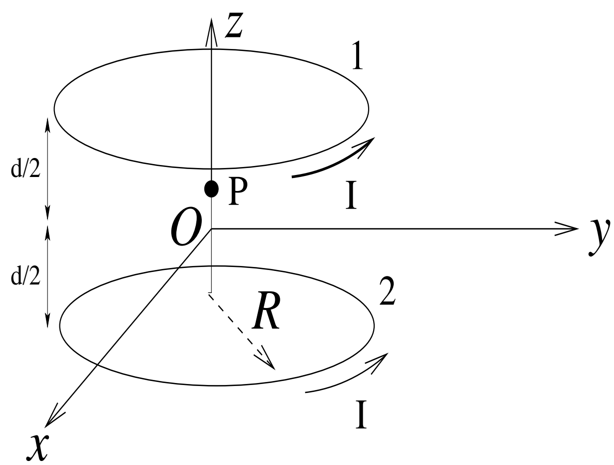
(a) A carga infinitesimal contida num elemento de carga dQ situado à uma distância r do centro é dada por $dQ = \sigma(r)dA$, sendo $dA = 2\pi r dr$. Integrando a expressão acima entre $r = a$ e $r = b$, obtemos $Q = 2\pi C(b - a)$.

(b) Assumindo que o potencial elétrico é nulo num ponto infinitamente distante de P, podemos escrever a seguinte expressão $dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dQ}{(x^2+r^2)^{1/2}}$, onde $dQ = \sigma(r)dA$. Integrando a relação acima $r = a$ e $r = b$, obtemos $V = \frac{C}{2\epsilon_0}\ln\left(\frac{b+\sqrt{b^2+x^2}}{a+\sqrt{a^2+x^2}}\right)$.

(c) O trabalho realizado para deslocar a carga q de P até $x = 0$ é dado por $W = q[V(0) - V(x)] = \frac{qC}{2\epsilon_0}\{\ln(\frac{b}{a}) - \ln\left(\frac{b+\sqrt{b^2+x^2}}{a+\sqrt{a^2+x^2}}\right)\}$

Questão 2

Considere um arranjo formado por duas espiras circulares de mesmo raio R e paralelas ao eixo $x - y$, cada uma distando de $d/2$ da origem. As espiras 1 e 2 situam-se acima e abaixo de $z = 0$ respectivamente e transportam correntes iguais I no mesmo sentido, conforme mostrado na figura abaixo.



(a) (1,5) Determine o vetor campo magnético produzido por cada uma das espiras num ponto $P = (0, 0, z)$ com $z > 0$.

(b) (1,0) Encontre o vetor campo magnético resultante $\vec{B}_{res}$ e o valor de z no qual B_{res} é máximo.

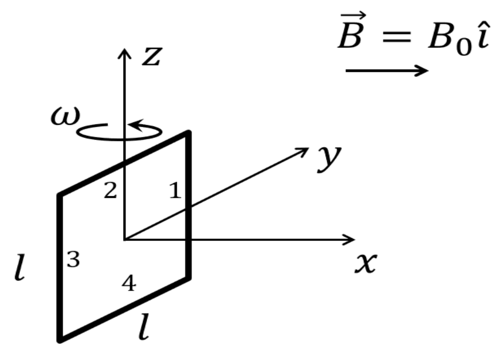
Solução da questão 2

(a) Dado um ponto P situado à uma distância z da origem (na figura o ponto P situa-se em $z > 0$), um elemento de corrente $d\vec{l}$ das espiras 1 e 2 irá distar de $r_1 = \sqrt{R^2 + (d/2 - z)^2}$ e $r_2 = \sqrt{R^2 + (z + d/2)^2}$, respectivamente. Usando a lei de Biot-Savart temos que o vetor campo magnético produzido por qualquer elemento das espiras 1 e 2 irá apontar na direção $+\hat{k}$. Assim $\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I R^2}{2} \frac{1}{[R^2+(d/2-z)^2]^{3/2}} \hat{k}$ e $\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I R^2}{2} \frac{1}{[R^2+(d/2+z)^2]^{3/2}} \hat{k}$.

(b) O campo magnético resultante no ponto P é dado pela soma vetorial $\vec{B}_{res} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I R^2}{2} \left\{ \frac{1}{[R^2+(d/2-z)^2]^{3/2}} + \frac{1}{[R^2+(d/2+z)^2]^{3/2}} \right\} \hat{k}$. Derivando a expressão acima com relação à z, encontramos que o campo magnético tem um máximo em $z = 0$.

Questão 3

Uma espira quadrada de lado l e resistência R gira com velocidade angular constante ω, fazendo com que a variação do ângulo entre $\vec{B}$ e $\vec{A}$ seja $\theta = \omega t$. A espira está submetida a um campo magnético uniforme $\vec{B} = B_0\vec{i}$ e no instante $t = 0$ ela coincide com o plano yz, conforme mostra a figura abaixo.



(a) (1,0) Determine a corrente induzida na espira em função do tempo.

(b) (1,0) Calcule o módulo da força magnética sobre o trecho 1 da espira.

(c) (0,5) Calcule os instantes de tempo t, situados no intervalo $0 \leq t \leq T$ onde $T = \frac{2\pi}{\omega}$, em que a corrente na espira é nula.

Solução da questão 3

(a) O fluxo magnético instantâneo sobre a espira é dado por $\phi_B = \vec{B}.\vec{A} = B_0 l^2 \cos(\theta)$, onde $\theta = \omega t$ denota o ângulo formado entre $\vec{B}$ e $\vec{A}$ em cada instante. Portanto a força eletromotriz induzida, obtida a partir da Lei de Faraday, vale $\mathcal{E} = -\frac{d\phi_B}{dt}$ de forma que $I_{ind} = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{B_0 l^2 \omega}{R} \sin(\omega t)$.

(b) Ao longo do trecho 1 da espira, a força magnética é dada por $\vec{F} = I_{ind} l \hat{k} \times \vec{B} = \frac{B_0^2 l^3 \omega}{R} \sin(\omega t) \hat{j}$

(c) A corrente induzida é nula nos instantes onde $\sin(\omega t) = 0$ e portanto em $t = 0, T/2$ e T.

Questão 4

Uma onda eletromagnética plana de frequência f propaga-se no vácuo, ao longo do sentido $y > 0$ com velocidade de propagação c. O campo elétrico, polarizado no eixo z, tem amplitude E_0 e no instante $t = 0$ é nulo em $y = 0$. **Expresse suas respostas apenas em termos de E_0, f, c e das constantes universais.**

(a) (1,0) Obtenha a expressão para o campo elétrico.

(b) (0,5) A expressão para o campo magnético.

(c) (1,0) O vetor de Poynting e a energia total carregada pela onda através de uma área A perpendicular à frente de onda durante um intervalo de tempo igual ao período da onda.

Solução da questão 4

(a) A onda se propaga na direção y com velocidade $\vec{c} = +c\hat{j}$ e o vetor campo elétrico é polarizado na direção $\hat{k}$, de forma que $\vec{E}(y,t) = E_0 \cos(ky - \omega t + \phi)\hat{k}$. Lembrando que $k = \frac{2\pi f}{c}$, $\omega = 2\pi f$ e para encontrarmos a defasagem ϕ, é dado que $\vec{E}(0,0) = 0$ e portanto $\phi = \pm\frac{\pi}{2}$. Finalmente, obtemos que $\vec{E}(y,t) = E_0 \cos(\frac{2\pi f}{c}y - 2\pi f t \pm \frac{\pi}{2})\hat{k}$.

(b) O campo magnético é dado por $\vec{B} = \frac{\hat{j}}{c} \times \vec{E}$, de onde obtemos a expressão $\vec{B}(y,t) = \frac{E_0}{c}\cos(\frac{2\pi f}{c}y - 2\pi f t \pm \frac{\pi}{2})\hat{i}$

(c) A expressão para o vetor de Poynting é dada por $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B}$, de forma que $\vec{S} = \frac{E_0^2}{c\mu_0}\cos^2(\frac{2\pi f}{c}y - 2\pi f t \pm \frac{\pi}{2})\hat{j}$. A energia infinitesimal transportada pela onda através de uma área A durante um intervalo de tempo dt é dada por $dU = SAdt$ e portanto num intervalo T seu valor é dado por $U = \frac{E_0^2}{2c\mu_0}AT$.

Formulário

$$\vec{F} = \frac{qq'(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3}, \qquad \vec{F} = q\vec{E}, \quad \vec{E} = \frac{q(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3}, \qquad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r^2}\hat{r}, \qquad V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|},$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V, \quad U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i<j}\frac{q_i\,q_j}{r_{ij}}, \quad dA = 2\pi r dr (\text{coordenadas} \quad \text{polares})$$

$$W = q\Delta V, \quad V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{\ell}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V, \quad d\vec{F} = Id\vec{\ell}\times\vec{B}, \quad \vec{\mu} = I\vec{A},$$

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}, \quad \oint \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0, \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2}, \quad \oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\cdot d\vec{A},$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt}, \quad \Phi^{total} = N\phi_{espira} = LI, \quad \Phi_{21}^{total} = N_2\phi_{espira} = M_{21}I_1, \;\; u_m = \frac{B^2}{2\mu_0}, \;\; U = \frac{LI^2}{2},$$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0\epsilon_0\frac{d}{dt}\int \vec{E}\cdot d\vec{A}, \quad I = \int \vec{J}\cdot d\vec{A}, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}, \quad \nabla^2\vec{E} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}, \quad \nabla^2\vec{B} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}, \quad E = cB,$$

$$\vec{E} = E_m\cos(kx\pm\omega t+\phi)\,\hat{\jmath}, \quad \vec{B} = B_m\cos(kx\pm\omega t+\phi)\,\hat{k}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad k\,c = \omega,$$

$$f = 1/T, \quad \vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}, \quad S = uc, \quad u = u_e + u_m = \frac{\epsilon_0\,E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad I = \langle S \rangle = \frac{E_m\,B_m}{2\mu_0},$$

$$\langle \cos^2(kx-\omega t+\phi) \rangle = \langle \operatorname{sen}^2(kx-\omega t+\phi) \rangle = 1/2, \quad \langle \cos(kx-\omega t+\phi)\operatorname{sen}(kx-\omega t+\phi) \rangle = 0.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}), \quad \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sqrt{x^2+a^2}.$$