Física III - 4323203

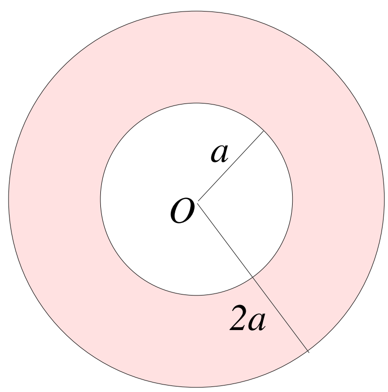
Escola Politécnica - 2019

GABARITO DA P2

09 de maio de 2019

Questão 1

Uma esfera condutora de raio a está no interior de uma casca esférica fina condutora de raio $2a$. A esfera e a casca esférica são concêntricas e o espaço entre elas está preenchido com um material de condutividade $\sigma(r) = \frac{A}{r}$ constante, (A é uma constante positiva). Uma corrente elétrica I, uniformemente distribuída através do material entre os condutores, flui da esfera interna para a casca esférica.



(a) (0,5 ponto) Determine a dimensão da constante A no Sistema Internacional de Unidades.

(b) (1,0 ponto) Calcule a resistência elétrica entre os condutores.

(c) (1,0 ponto) Dada uma diferença de potencial V aplicada entre as duas supercícies, calcule o vetor densidade de corrente $\vec{J}(r)$ em função dos dados do problema.

$\boxed{\textbf{Solução da questão 1}}$

(a) A condutividade possui dimensão de inverso de resistência multiplicada por inverso de unidade de comprimento. Portanto, no SI, A deve ter dimensão de inverso de Ohm.

(b) Utilizando a expressão para a resistência de uma camada infinitesimal de espessura dr e área $4\pi r^2$, teremos

$$dR = \frac{1}{\sigma(r)}\frac{dr}{4\pi r^2} = \frac{1}{A}\frac{1}{4\pi}\frac{dr}{r}$$

Integrando entre $r = a$ e $r = 2a$, teremos

$$R = \frac{1}{4\pi A}\int_a^{2a}\frac{dr}{r} = \frac{\ln(2)}{4\pi A}$$

(c) A diferença de potencial V produz uma corrente I dada por

$$I = \frac{V}{R} = \frac{4\pi AV}{\ln(2)}.$$

Essa corrente flui da superfície interna (maior potencial) para a externa (menor potencial). Por conservação de carga, devemos ter $I = \oint \vec{J}\cdot d\vec{A}$, para qualquer superfície fechada passando por pontos entre a e $2a$. Usando a simetria radial da densidade de corrente, podemos considerar uma superfície esférica de raio r ($a \leq r \leq 2a$) de modo que

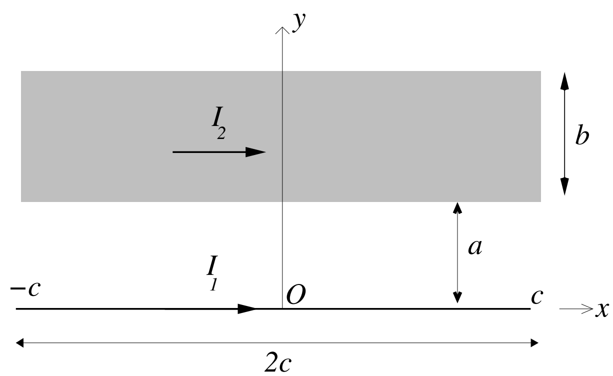
$$\oint \vec{J}(r)\cdot d\vec{A} = J(r)\hat{r}\cdot 4\pi r^2\hat{r} = J(r)4\pi r^2 = I = \frac{4\pi AV}{\ln(2)}$$

Logo,

$$\vec{J}(r) = \frac{AV}{\ln(2)r^2}\hat{r}.$$

Questão 2

A figura abaixo mostra trechos de um fio condutor reto e uma fita condutora de comprimentos $2c$ e L, respectivamente. A fita possui largura b e sua espessura pode ser desconsiderada. Correntes I_1 e I_2 percorrem o fio e a fita, respectivamente. A densidade linear de corrente na fita é uniforme $(\vec{J} = I_2/b)\hat{x}$.



(a) (1,0 ponto) Usando a lei de Biot-Savart, calcule o vetor campo magnético $\vec{B}$ produzido pelo fio num ponto situado ao longo do eixo y.

(b) (1,5 ponto) Considerando **que agora o fio é infinito,** $c \to \infty$**,** e a fita é infinita ao longo da direção x, calcule o vetor força por unidade de comprimento L produzida pelo fio sobre a fita.

$\boxed{\textbf{Solução da questão 2}}$

(a) De acordo com a lei de Biot-Savart, o elemento do fio $d\vec{\ell} = dx\hat{x}$ transportanto uma corrente I_1 produz ao longo do eixo y o campo magnético infinitesimal:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \frac{dx\hat{x} \times (y\widehat{y} - x\widehat{x})}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Integrando a equação acima entre $-c$ and c, obtemos:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_1 c}{2\pi y \sqrt{c^2 + y^2}} \hat{z}.$$

(b) Tomando $c \to \infty$, a expressão para o campo do fio é dada por:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi y} \hat{z}.$$

A força magnética sobre a fita de largura dy e comprimento L é

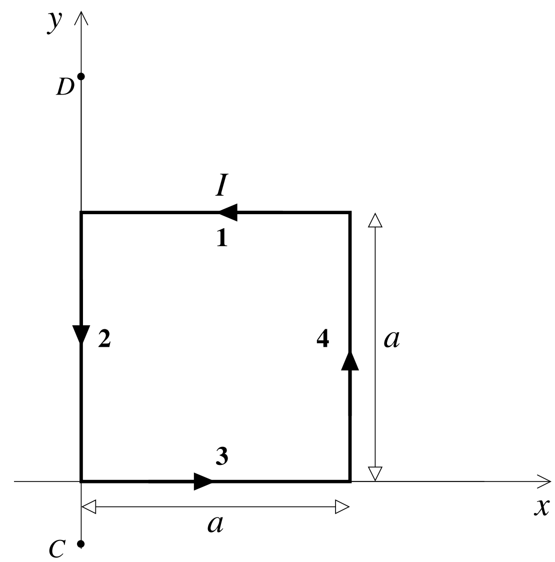
$$d\vec{F} = (J dy) \vec{L} \times \vec{B} = \frac{I_2}{b} L \frac{\mu_0 I_1}{2\pi y} dy\ \hat{x} \times \hat{z} = -\frac{I_2}{b} L \frac{\mu_0 I_1}{2\pi y} dy\ \hat{y}$$

Integrando em y, obtemos a expressão para a força magnética:

$$\frac{\vec{F}}{L} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi b} \int_a^{a+b} \frac{dy}{y}\ \hat{y} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi b} \log \frac{a+b}{a}\ \hat{y}.$$

Questão 3

Uma corrente estacionária I circula no sentido anti-horário de uma espira condutora quadrada, de lado a. A figura ao lado mostra a espira em um sistema de coordenadas tal que o plano da espira coincide com o plano xy ($z = 0$). Considere o campo magnético (no mesmo sistema de coordenadas)



$$\vec{B}(x, y, z) = B_0 \left[\left(1 - \frac{x}{a}\right)\hat{\imath} + \left(1 - \frac{y}{a}\right)\hat{\jmath} + \frac{2z}{a}\hat{k} \right].$$

(a) (1,5 ponto) Calcule as força magnéticas $\vec{F}_i$ ($i = \mathbf{1,\ 2,\ 3,\ 4}$) que atuam em cada um dos lados da espira (como indicados na figura). Calcule também a *força resultante sobre a espira.*

(b) (1,0 ponto) Suponha que o movimento da espira seja restrito a rotações em torno de um eixo vertical fixo passando pelos pontos CD (veja a figura). Calcule o torque em torno deste eixo em relação à origem.

Sugestão para os itens (a) e (b): Calcule primeiramente as forças infinitesimais $d\vec{F}_i$ e em seguida obtenha $\vec{F}_i$, efetuando a integral correspondente.

$\boxed{\textbf{Solução da questão 3}}$

(a) O campo magnético possui os seguintes valores ao longo de cada lado:

$$\vec{B}_1 = \vec{B}(x,a,0) = B_0\left(1-\frac{x}{a}\right)\hat{\imath}, \quad \vec{B}_2 = \vec{B}(0,y,0) = B_0\left[\hat{\imath} + \left(1-\frac{y}{a}\right)\hat{\jmath}\right],$$

$$\vec{B}_3 = \vec{B}(x,0,0) = B_0\left[\left(1-\frac{x}{a}\right)\hat{\imath} + \hat{\jmath}\right] \quad e \quad \vec{B}_4 = \vec{B}(a,y,0) = B_0\left(1-\frac{y}{a}\right)\hat{\jmath}.$$

Usando $d\vec{F}_i = Id\vec{L}_i \times \vec{B}$, com $d\vec{L}_1 = dx\hat{\imath}$, $d\vec{L}_2 = dy\hat{\jmath}$, $d\vec{L}_3 = dx\hat{\imath}$ e $d\vec{L}_4 = dy\hat{\jmath}$, segue que $d\vec{F}_1 = d\vec{F}_4 = 0$ e portanto $\vec{F}_1 = \vec{F}_4 = 0$. Por outro lado, as forças $d\vec{F}_2$ e $d\vec{F}_3$ são dadas por

$$d\vec{F}_2 = I(dy\hat{\jmath}) \times \vec{B}_2 = I(dy\hat{\jmath}) \times \left\{B_0\left[\hat{\imath} + \left(1-\frac{y}{a}\right)\hat{\jmath}\right]\right\} = -IdyB_0\hat{k}$$

Integrando desde $y = a$ até $y = 0$, teremos $\vec{F}_2 = aB_0\hat{k}$

$$d\vec{F}_3 = I(dx\hat{\imath}) \times \vec{B}_3 = I(dx\hat{\imath}) \times \left\{B_0\left[\left(1-\frac{x}{a}\right)\hat{\imath} + \hat{\jmath}\right]\right\} = IdxB_0\hat{k}$$

Integrando desde $x = 0$ até $x = a$, teremos $\vec{F}_3 = aB_0\hat{k}$

A força resultante é $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = 2IaB_0\hat{k}$.

(b) Como a força $\vec{F}_2$ atua sobre o eixo y (de rotação) o torque correspondente será nulo. Usando a força $d\vec{F}_3$, que atua sobre um elemento de comprimento dx teremos para o torque infinitesimal

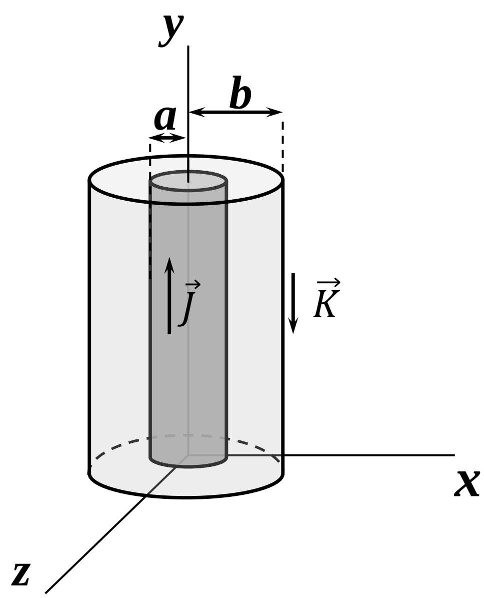
$$d\vec{\tau}_3 = \vec{r} \times d\vec{F}_3 = (x\hat{\imath}) \times \left(IdxB_0\hat{k}\right) = -IB_0xdx\hat{\jmath}.$$

Integrando desde $x = 0$ até $x = a$, teremos

$$\vec{\tau}_3 = -\frac{a^2IB_0}{2}\hat{\jmath}.$$

Questão 4

Um fio condutor muito longo e de seção cilíndrica de raio a está envolto por uma casca cilíndrica de raio b, formando um *cabo coaxial*. No fio há uma densidade de corrente uniforme $\vec{J} = J\hat{\jmath}$ e na casca uma densidade de corrente superficial $\vec{K} = -K\hat{\jmath}$, sendo J e K constantes positivas. **Expresse suas respostas em termos dos parâmetros dados:**



(a) (1,0 ponto) Calcule o campo magnético nos pontos onde $0 \leq r \leq b$ (r é a distância do ponto até o eixo y).

(b) (1,0 ponto) Calcule o campo magnético na região exterior à casca cilíndrica ($r > b$).

(c) (0,5 ponto) Determine o valor de J/K tal que o campo seja nulo na região $r > b$.

$\boxed{\textbf{Solução da questão 4}}$

(a) Uma vez que a corrente é percorrida ao longo da direção y, as linhas de campo magnético formam circunferências concêntricas, cujo vetor $\vec{B}(r)$ aponta tangencialmente em cada ponto da linha, especificados aqui pelo versor $\widehat{\theta}$. Portanto, o lado esquerdo da lei de Ampére ($\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{int}$) é dado por $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B(r).2\pi r$.

Como a corrente elétrica se distribui uniformemente ao longo de $0 < r < a$, a corrente englobada I_{int} é dada por $I_{int} = J\pi r^2$, sendo r a distância entre a linha amperiana e o eixo y. Portanto, $\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 J}{2} r\widehat{\theta}$.

Para calcularmos o vetor campo magnético entre $a < r < b$, vemos que lado esquerdo da relação $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{int}$ é o mesmo que aquele calculado anteriormente. Neste caso, I_{int} corresponde à toda corrente englobada entre $0 < r < a$, dada por $I_{int} = J\pi a^2$. Portanto, $\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 J a^2}{2r}\widehat{\theta}$.

(b) Para $r > b$, a corrente englobada é dada por $I_{int} = J\pi a^2 - 2K\pi b$ e portanto $\vec{B}(r) = \frac{\mu_0}{2r}(Ja^2 - 2Kb)\widehat{\theta}$.

(c) O campo magnético será nulo na região $r > b$ quando

$$\frac{J}{K} = \frac{2b}{a^2}.$$

Formulário

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{\ell}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} V, \quad dR = \rho\frac{d\ell}{A}, \quad V = RI, \quad \vec{J} = \sigma\vec{E} = \frac{1}{\rho}\vec{E},$$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0, \quad d\vec{F} = I d\vec{\ell}\times\vec{B}, \quad \vec{\mu} = I\vec{A}, \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2}, \quad \oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{int}.$$

$$d\vec{\tau} = \vec{r}\times d\vec{F}, \quad \vec{\tau} = \vec{\mu}\times\vec{B}, \quad U = -\vec{\mu}\cdot\vec{B},$$

Algumas integrais

$$\int \frac{dx}{(c+x^2)^{1/2}} = \log(x+\sqrt{c+x^2}), \qquad \int \frac{dx}{(c+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{c\,(c+x^2)^{1/2}},$$

$$\int \frac{x\,dx}{(c+x^2)^{1/2}} = \sqrt{c+x^2}, \qquad \int \frac{x\,dx}{(c+x^2)^{3/2}} = -\frac{1}{(c+x^2)^{1/2}},$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right), \qquad \int \frac{x\,dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{2}\log(a^2+x^2).$$