Física III - 4323203

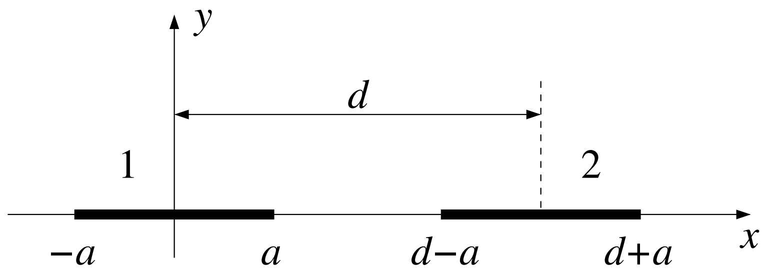
Escola Politécnica - 2019

GABARITO DA REC

25 de Julho de 2019

Questão 1

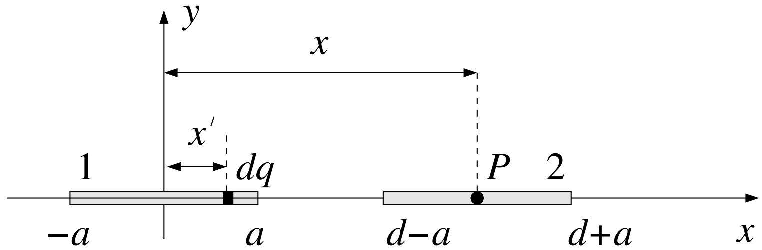
Dois bastões finos 1 e 2, idênticos, de comprimento $2a$, têm densidade linear de carga λ constante. Os bastões estão sobre o eixo x e seus centros estão separados por uma distância $d > 2a$, conforme mostra a figura.



(a) (1,5 ponto) Calcule o campo elétrico produzido pelo bastão 1 sobre um ponto P do eixo x com abscissa $x > a$.

(b) (1.0 ponto) Calcule a força que o bastão 1 exerce sobre o bastão 2.

Solução da questão 1



(a) O campo produzido pela carga dq do bastão 1 no ponto P é

$$dE = dE_x = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{(x-x')^2} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{dx'}{(x-x')^2}$$

O campo total em P é

$$E = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{-a}^{a}\frac{dx'}{(x-x')^2} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{(x-x')}\bigg|_{-a}^{a} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{(x-a)} - \frac{1}{(x+a)}\right]$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{(x-a)} - \frac{1}{(x+a)}\right]\vec{\imath}}$$

(b) O força sobre o elemento de carga dq_2 com abscissa x do bastão 2 é igual a

$$dF = E dq_2 = E\lambda dx$$

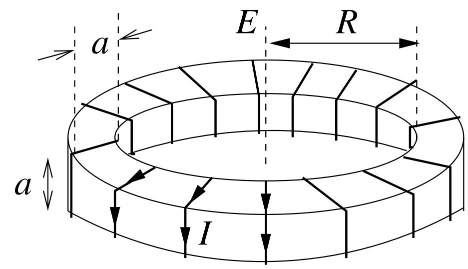
A força total sobre o bastão 2 é

$$F = \int_{d-a}^{d+a} E\lambda dx = \frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0}\int_{d-a}^{d+a} dx\left[\frac{1}{(x-a)} - \frac{1}{(x+a)}\right] = \frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right)\bigg|_{d+a}^{d-a}$$

$$\boxed{\vec{F} = \frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{d^2}{d^2-4a^2}\right)\vec{\imath}}$$

Questão 2

Na figura vemos uma bobina toroidal de seção reta quadrada de lado a e raio interno R. Ela possui um enrolamento com N espiras arranjadas de forma compacta e uniforme. A corrente que passa pelo enrolamento da bobina é I.



(a) (1,0 ponto) Usando a lei de Ampère calcule o campo $\vec{B}_0(r)$ no interior da bobina, onde r é a distância a partir do eixo central de simetria da bobina (E).

(b) (1,0 ponto) Calcule o fluxo do campo $B_0(r)$ através de uma espira e a auto-indutância L da bobina.

(c) (0,5 ponto) Se a bobina estivesse preenchida com um material magnético de suscetibilidade κ_m, qual seria o valor do campo magnético dentro da bobina?

Solução da questão 2

(a) Devido à simetria toroidal, as linhas do campo $\vec{B_0}$ serão círculos concêntricos ao eixo da bobina toroidal, $\vec{B_0} = B_0\widehat{\phi}$. De acordo lei de Ampère $\oint \vec{B_0} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{\text{total}}$, o campo magnético será diferente de zero apenas na região $R < r < R + a$, uma vez que não há corrente englobada na região $0 < r < R$. Temos então:

$$\oint \vec{B_0} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{\text{total}} \quad \Longrightarrow \quad B_0(2\pi r) = \mu_0 N I \quad \Longrightarrow \quad B_0 = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\vec{B_0} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}\widehat{\phi}} \quad \text{para} \quad R < r < R + a$$

(b) O fluxo magnético ϕ_1 através de uma espira da bobina é

$$\phi_1 = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_R^{R+a} B(r)(a dr) = \frac{\mu_0 N I a}{2\pi} \int_R^{R+a} \frac{dr}{r} = N\phi_1 = \frac{\mu_0 N I a}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right).$$

O fluxo magnético total é

$$\Phi_m = N\phi_1 = \frac{\mu_0 N^2 I a}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right).$$

A auto-indutância é dada por

$$L = \frac{\Phi_m}{I} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{L = \tfrac{\mu_0 N^2 a}{2\pi} \ln\left(\tfrac{R+a}{R}\right)}$$

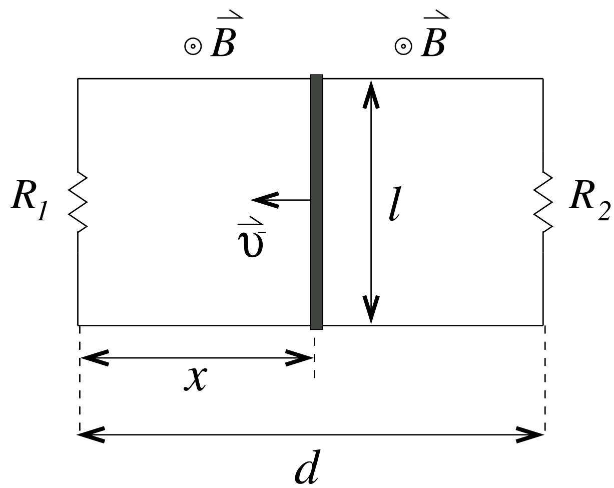
(c) Dada a suscetibilidade magnética κ_m, o campo magnético resultante é dado por:

$$\vec{B} = \vec{B_0} + \mu_0 \vec{M} = (1 + \kappa_m)\vec{B_0} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{B} = \mu_0(1 + \kappa_m)\tfrac{NI}{2\pi r}\widehat{\phi}}$$

Alternativamente, a resposta poderia ser dada em termos permeabilidade $\mu = \mu_0(1+ \kappa_m)$, $\boxed{\vec{B} = \mu\tfrac{NI}{2\pi r}\widehat{\phi}}$.

Questão 3

Uma barra condutora perfeita (com resistência nula) desliza sem atrito com velocidade v, para a esquerda, sobre dois fios condutores também perfeitos. Dois resistores R_1 e R_2 estão conectados às extremidades dos dois fios, formando o circuito mostrado na figura. A distância entre os fios horizontais é l, entre os resistores é d, e da barra ao resistor R_1 é x. Um campo magnético uniforme e constante de intensidade B é aplicado perpendicularmente ao circuito, para fora da página. <u>Ao calcular o fluxo magnético através de qualquer superfície, adote o vetor normal à superfície, na mesma direção e sentido do campo magnético</u>.



(a) (0,5 ponto) Determine o sentido (horário ou anti-horário) da corrente na porção do circuito à direita da barra, justificando sua resposta por meio da Lei de Lenz.

(b) (0,5 ponto) Calcule o fluxo magnético através da porção do circuito à direita da barra. Determine a corrente que atravessa o resistor R_2 por meio da Lei de Faraday.

(c) (0,5 ponto) Determine o sentido (horário ou anti-horário) da corrente na porção do circuito à esquerda da barra, justificando sua resposta por meio da Lei de Lenz.

(d) (0,5 ponto) Calcule o fluxo magnético através da porção do circuito à esquerda da barra. Determine a corrente que atravessa o resistor R_1 por meio da Lei de Faraday.

(e) (0,5 ponto) Calcule a intensidade e a direção da força magnética exercida sobre a barra. Essa força é de aceleração ou de frenagem?

Solução da questão 3

(a) O fluxo magnético através da porção direita do circuito está aumentando. Pela lei de Lenz a corrente fluirá nessa porção de modo a produzir um campo magnético que se oponha ao campo externo, ou seja, que aponte para dentro da página, de modo a diminuir o fluxo. Logo, a corrente percorrerá a porção direita do circuito no sentido horário.

(b) Com a convenção de que o vetor normal à superfície aponta para fora da página, o fluxo magnético através da porção direita do circuito é dado por

$$\boxed{\Phi_2 = Bl(d - x)}\,.$$

Pela lei de Faraday, a força eletromotriz induzida é

$$\varepsilon_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = Bl\frac{dx}{dt} = -Blv \Longrightarrow \boxed{I_2 = \frac{\varepsilon_2}{R_2} = -\frac{Blv}{R_2}}\,.$$

(c) O fluxo magnético através da porção esquerda do circuito está diminuindo. Pela lei de Lenz a corrente fluirá nessa porção de modo a produzir um campo magnético na direção do campo externo, ou seja, que aponte para fora da página, de modo a aumentar o fluxo. Logo, a corrente percorrerá a porção direita do circuito no sentido anti-horário.

(d) Com a convenção de que o vetor normal à superfície aponta para fora da página, o fluxo magnético através da porção esquerda do circuito é dado por

$$\boxed{\Phi_1 = Blx}\,.$$

Pela lei de Faraday, a força eletromotriz induzida é

$$\varepsilon_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -Bl\frac{dx}{dt} = Blv \Longrightarrow \boxed{I_1 = \frac{\varepsilon_1}{R_1} = \frac{Blv}{R_1}}\,.$$

(e) Ambas as correntes fluem através da barra de baixo para cima, de modo que a corrente total através da barra é

$$I = |I_1| + |I_2| = Blv\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Portanto, a força magnética sobre a barra será

$$\boxed{F = IlB = B^2 l^2 v \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)} ,$$

apontando da esquerda para a direita, correspondendo a uma <u>força de frenagem</u>.

Questão 4

Na região do espaço $-a/2 < z < a/2$ limitada por superfícies condutoras em $z = -a/2$ e $z = a/2$ há uma onda eletromagnética no vácuo com um campo elétrico dado por

$$\vec{E} = E(z,t)\hat{\imath} = [E_0 \cos(kz - \omega t) + E_0 \cos(-kz - \omega t)]\hat{\imath} = 2E_0 \cos(kz)\cos(\omega t)\hat{\imath}.$$

(a) (1,0 ponto) Calcule o campo magnético $\vec{B}$.

(b) (0,5 ponto) Calcule o vetor de Poynting.

(c) (1,0 ponto) Use as equações de Maxwell apropriadas para calcular a densidade de carga e a densidade de corrente na região $-a/2 < z < a/2$.

Solução da questão 4

(a) Note que $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$, onde $\vec{E}_1 = E_0 \cos(kz - \omega t)\hat{\imath}$ e $\vec{E}_2 = E_0 \cos(-kz - \omega t)\hat{\imath}$, são ondas planas com $\vec{k}_1 = k\hat{k}$ e $\vec{k}_2 = -k\hat{k}$. Assim,

$$\vec{B}_1 = \frac{1}{c}\hat{k} \times \vec{E}_1 = \frac{E_0}{c}\cos(kz - \omega t)\hat{\jmath}; \qquad \vec{B}_2 = \frac{1}{c}(-\hat{k}) \times \vec{E}_2 = -\frac{E_0}{c}\cos(-kz - \omega t)\hat{\jmath}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{E_0}{c}(\cos(kz - \omega t) - \cos(-kz - \omega t))\hat{\jmath}$$

$$\boxed{\vec{B} = 2\frac{E_0}{c}\mathrm{sen}(kz)\mathrm{sen}(\omega t)\hat{\jmath}}$$

(b) Vetor de Poynting $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{B}/\mu_0$

$$\vec{S} = \frac{EB}{\mu_0}\hat{k} = \frac{4E_0^2}{\mu_0\, c}\cos(kz)\mathrm{sen}(kz)\cos(\omega t)\mathrm{sen}(\omega t)\hat{k} \Longrightarrow \boxed{\vec{S} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\mathrm{sen}(2kz)\mathrm{sen}(2\omega t)\hat{k}}$$

(c) A lei de Gauss $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$ permite calcular a densidade de carga ρ:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E(z,t)}{\partial x} = 0 \Longrightarrow \boxed{\rho = 0}$$

A lei de Ampère-Maxwell com o termo de corrente de deslocamento $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\epsilon_0\partial\vec{E}/\partial t$ permite calcular a densidade de corrente $\vec{J}$.

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & B(z,t) & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial B(z,t)}{\partial z}\hat{\imath} = -2\frac{k}{c}E_0\cos(kz)\mathrm{sen}(\omega t)\hat{\imath}.$$

$$\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = -2\mu_0\epsilon_0\omega E_0\cos(kz)\,\mathrm{sen}(\omega t)\hat{\imath} = -2\frac{k}{c}E_0\cos(kz)\mathrm{sen}(\omega t)\hat{\imath},$$

onde usamos $\mu_0\epsilon_0\omega = \omega/c^2 = k/c$. Substituindo na lei de Ampère-Maxwell obtemos

$$\boxed{\vec{J} = \vec{0}}$$

Formulário

$$\vec{F} = \frac{qq'(\vec{r}-\vec{r'})}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r'}|^3}, \qquad \vec{F} = q\vec{E}, \quad \vec{E} = \frac{q(\vec{r}-\vec{r'})}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r'}|^3}, \qquad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r^2}\hat{r}, \qquad V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r'}|},$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V, \quad U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i<j}\frac{q_i\,q_j}{r_{ij}}, \quad dA = 2\pi r dr (\text{coordenadas} \quad \text{polares})$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots, \quad U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} = \frac{QV}{2}, \quad \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \kappa, \quad u = \frac{\epsilon_0}{2}E^2, \quad E = \frac{E_0}{\kappa},$$

$$W = q\Delta V, \quad V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{\ell}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V, \quad d\vec{F} = I d\vec{\ell}\times\vec{B}, \quad \vec{\mu} = I\vec{A},$$

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}, \quad \oint \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0, \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2}, \quad \oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\cdot d\vec{A},$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt}, \quad \Phi^{total} = N\phi_{espira} = LI, \quad \Phi_{21}^{total} = N_2\phi_{espira} = M_{21}I_1, \quad u_m = \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad U = \frac{LI^2}{2},$$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0\epsilon_0\frac{d}{dt}\int \vec{E}\cdot d\vec{A}, \quad I = \int \vec{J}\cdot d\vec{A}, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}, \quad \nabla^2\vec{E} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}, \quad \nabla^2\vec{B} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}, \quad E = cB,$$

$$\vec{E} = E_m\cos(kx \pm \omega t + \phi)\,\hat{\jmath}, \quad \vec{B} = B_m\cos(kx \pm \omega t + \phi)\,\hat{k}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad k\,c = \omega,$$

$$f = 1/T, \quad \vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}, \quad S = uc, \quad u = u_e + u_m = \frac{\epsilon_0\,E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad I = \langle S \rangle = \frac{E_m\,B_m}{2\mu_0},$$

$$\langle \cos^2(kx-\omega t+\phi)\rangle = \langle \text{sen}^2(kx-\omega t+\phi)\rangle = 1/2, \quad \langle \cos(kx-\omega t+\phi)\,\text{sen}(kx-\omega t+\phi)\rangle = 0.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}), \qquad \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sqrt{x^2+a^2}.$$