Física III - 4323203

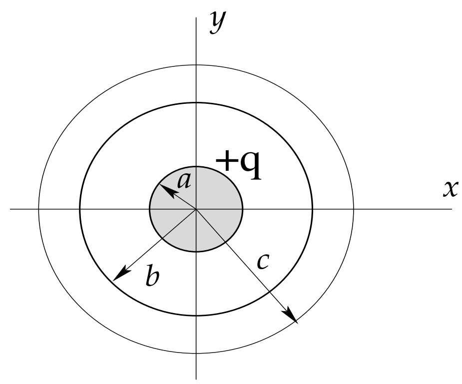
Escola Politécnica - 2019

GABARITO DA SUB

27 de Junho de 2019

Questão 1

A figura mostra uma carga $+q$ uniformemente distribuída sobre uma esfera isolante de raio a, localizada no centro de uma casca esférica condutora de raios interno b e externo c. Sabendo que a casca esférica possui uma carga total $-3q$, determine:



(a) (1,0) O vetor campo elétrico $\vec{E}(r)$ nas regiões $r < a$ e $a < r < b$.

(b) (1,0) O vetor campo elétrico $\vec{E}(r)$ nas regiões $b < r < c$ e $r > c$;

(c) (0,5) Determine a carga elétrica induzida nas superfície $r = b$ e $r = c$.

Solução da questão 1

Por simetria, o campo elétrico aponta na direção radial, de forma que $\vec{E} = E(r)\hat{r}$, sendo $\hat{r}$ o versor apontando na direção radial. Escolhendo como superfície gaussiana uma esfera concêntrica de raio r, o lado esquerdo da lei de Gauss $\oint \vec{E}.\vec{da} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$ é dado por $E.4\pi r^2$, sendo r a distância a partir da origem.

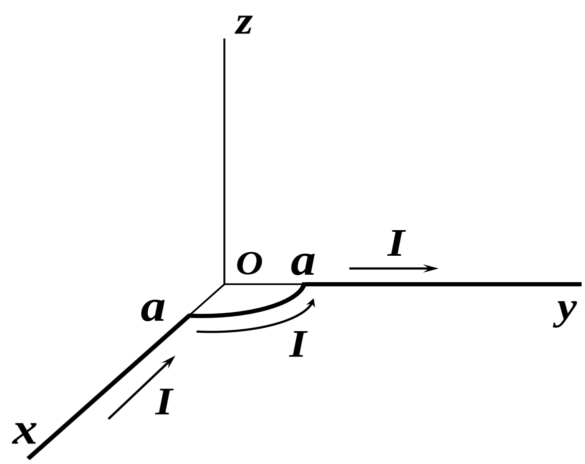
(a) Como na região $r < a$ a carga $+q$ é uniformemente distribuída, a carga interna q_{int} é dada por $q_{int} = qr^3/a^3$. Portanto, $\vec{E} = \frac{+qr}{4\pi\epsilon_0 a^3}\hat{r}$ em $r < a$. Na região $a < r < b$ a carga interna q_{int} corresponde a carga total $+q$. Portanto, $\vec{E} = \frac{+q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}$ na região $a < r < b$.

(b) Como o campo elétrico no interior de condutor em equilíbrio eletrostático deve ser nulo, $\vec{E}(r) = 0$ na região $b < r < c$. Na região $r > c$, a carga interna é dada por $q_{int} = +q - 3q = -2q$ e portanto $\vec{E}(r) = \frac{-q}{2\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}$.

(c) Utilizando uma superfície gaussiana com raio $b < r < c$ e também o fato que $E = 0$ no interior do condutor, a Lei de Gauss implica que a carga induzida na superfície $r = b$ vale $q_{ind} = -q$. Como todo excesso de carga deve se distribuir na superfície de um condutor em equilíbrio eletrostático e a carga total vale $-3q$, a carga na superfície $r = c$ vale $q_{ind} = -2q$.

Questão 2

Um circuito é formado por dois trechos retilíneos semi-infinitos e por um trecho circular de raio a, conforme mostrado na figura abaixo:



(a) (1,5) Usando a lei de Biot-Savart, determine o vetor campo magnético $\vec{B}(z)$ num ponto P situado ao longo do eixo $z > 0$ produzido apenas pelos trechos retilíneos do fio.

(b) (1,0) Usando a lei de Biot-Savart, determine o vetor campo magnético $\vec{B}(z)$ num ponto P situado ao longo do eixo $z > 0$ produzido apenas pelo trecho circular de raio a.

Solução da questão 2

(a) Considerando o trecho retilíneo ao longo do eixo y, ao ponto P situado à distância $z > 0$ da origem associamos ao vetor $\vec{r} = z\hat{k} - y\hat{j}$ para um elemento de corrente $d\hat{l} = dy\hat{j}$. Usando a lei de Biot-Savart, o campo magnético infinitesimal é dado por:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \times \widehat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dyz}{(z^2 + y^2)^{3/2}} \widehat{i}.$$

Integrando a relação acima entre $y = a$ e $y = \infty$, obtemos

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi z} \left[1 - \frac{a}{(z^2 + a^2)^{1/2}} \right] \widehat{i}.$$

Procedendo de forma análoga ao trecho retilíneo ao longo do eixo x, o vetor campo magnético é dado por:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi z} \left[1 - \frac{a}{(z^2 + a^2)^{1/2}} \right] \widehat{j}.$$

(b) Para o trecho circular, a contribuição de um elemento de corrente $d\hat{l} = -a \sin\theta d\theta \hat{i} + a \cos\theta d\theta \hat{j}$, situado à distância $\vec{r} = z\hat{k} - a\cos\theta\hat{i} - a\sin\theta\hat{j}$ do ponto P, o elemento $d\vec{B}$ é dado por

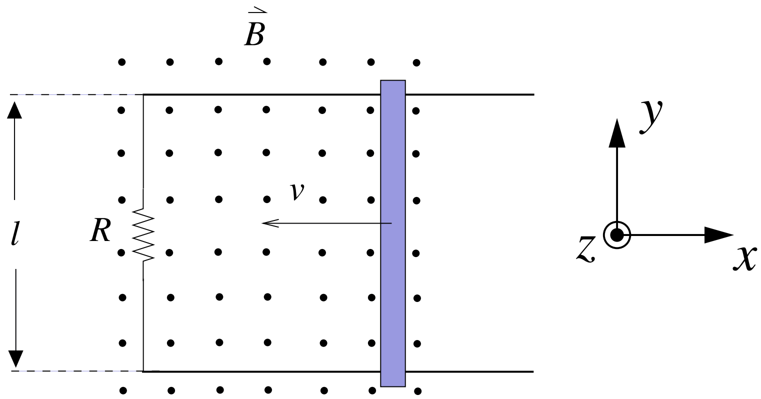
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{(-a\sin\theta d\theta\hat{i} + a\cos\theta d\theta\hat{j}) \times (z\hat{k} - a\cos\theta\hat{i} - a\sin\theta\hat{j})}{(z^2 + a^2)^{3/2}}.$$

Integrando a expressão acima entre $\theta = 0$ e $\theta = \pi/2$, obtemos

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I a}{8\pi} \left[\frac{2z(\hat{i} + \hat{j}) + a\pi\hat{k}}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \right].$$

Questão 3

A figura abaixo mostra uma barra condutora de comprimento l, deslizando para a esquerda, com velocidade constante $\vec{v}$, em contato com um fio, de modo a formar um circuito de resistência R. Também está ilustrado na figura um campo magnético $\vec{B}$, constante e uniforme, saindo da página.



(a) (0,5 ponto) Determine o sentido da corrente induzida no circuito (horário ou anti-horário), justificando sua resposta.

(b) (1,0 ponto) Calcule a corrente induzida I.

(c) (1,0 ponto) Calcule o vetor força externa $\vec{F}$ que está sendo aplicada na barra de modo a manter sua velocidade constante.

Solução da questão 3

(a) Como o fluxo magnético diminui com o tempo, de acordo com a lei de Lenz o sentido da corrente induzida será no sentido sentido anti-horário.

(b) O fluxo do campo magnético através do circuito é

$$\Phi_m = Blx(t) \Longrightarrow \mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -(-Blv) \Longrightarrow I = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = \frac{Blv}{R}$$

(c) Levando em conta o balanço de energia e considerando que a energia cinética da barra é mantida constante (v constante), então a potência fornecida é igual a potência dissipada no resistor, ou seja,

$$Fv = \mathcal{E}^2/R = (Blv)^2/R$$

$$\vec{F} = -\frac{(Bl)^2 v}{R}\,\hat{x};$$

Alternativamente, como a barra se move com velocidade constante e a força magnética atuando sobre a barra vale $\vec{F}_{mag} = \frac{(Bl)^2 v}{R}\,\hat{x}$, a força externa deve ter o mesmo módulo, porém dirigida no sentido $-\hat{x}$.

Questão 4

Um onda eletromagnética propagando-se no vácuo tem o campo elétrico dado por

$$\vec{E} = E_0 \,\mathrm{sen}\,(k_y y)\cos(k_z z - \omega t)\,\widehat{x}.$$

(a) (0,5 ponto) Determine a relação que deve haver entre k_y, k_z e ω para que o campo elétrico satisfaça a equação de ondas tridimensional.

(b) (1,0 ponto) A partir da forma diferencial da lei de Faraday determine o campo magnético associado ao campo elétrico dado.

(c) (1,0 ponto) Determine o vetor de Poynting no instante $t = 0$ em um ponto com coordenadas $x = 0$, $y = \frac{\pi}{2k_y}$ e $z = 0$.

$\boxed{\textbf{Solução da questão 4}}$

(a) Substituindo $\vec{E} = E_x\,\widehat{x}$ na equação de ondas tridimensional obtemos

$$\left[-k_y^2 - k_z^2\right] E_x = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 E_x \Longrightarrow k_y^2 + k_z^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 .$$

(b) Com $\vec{E} = E_x\,\vec{\imath}$, temos da lei de Faraday

$$\begin{aligned}\frac{\partial B_y}{\partial t} &= -\frac{\partial E_x}{\partial z} = E_0 k_z \operatorname{sen}(k_y y)\ \operatorname{sen}(k_z z - \omega t)\\ \frac{\partial B_z}{\partial t} &= +\frac{\partial E_x}{\partial y} = E_0 k_y \cos(k_y y)\cos(k_z z - \omega t).\end{aligned}$$

Integrando em t,

$$\begin{aligned}B_y &= E_0\left(\frac{k_z}{\omega}\right)\operatorname{sen}(k_y y)\cos(k_z z - \omega t)\\ B_z &= -E_0\left(\frac{k_y}{\omega}\right)\cos(k_y y)\ \operatorname{sen}(k_z z - \omega t).\end{aligned}$$

Logo,

$$\vec{B} = \left(\frac{E_0}{\omega}\right)\left[k_z\ \operatorname{sen}(k_y y)\cos(k_z z - \omega t)\ \widehat{y} - k_y \cos(k_y y)\ \operatorname{sen}(k_z z - \omega t)\ \widehat{z}\right]$$

(c) Como $\vec{E} = E_x\,\widehat{x}$ e $\vec{B} = B_y\,\widehat{y} + B_z\,\widehat{z}$, o vetor de Poynting fica

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} = \frac{1}{\mu_0}(-E_x B_z\,\widehat{y} + E_x B_y\,\widehat{z})$$

Em $t = 0$ no ponto P com coordenadas $(0, y = \frac{\pi}{2k_y}, 0)$ temos:

$$\vec{S}_P = \frac{1}{\mu_0}E_x B_y\,\widehat{z} = \frac{E_0^2\ k_z}{\mu_0\ \omega}\,\widehat{z}\,.$$

Formulário

$$\vec{F}=\frac{qq'(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3},\qquad \vec{F}=q\vec{E},\quad \vec{E}=\frac{q(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3},\qquad \vec{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{r^2}\hat{r},\qquad V=\frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|},$$

$$V=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{r},\quad \vec{E}=-\vec{\nabla}V,\quad U=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i<j}\frac{q_i\,q_j}{r_{ij}},\quad dA=2\pi r dr(\text{coordenadas}\quad\text{polares})$$

$$W=q\Delta V,\quad V_B-V_A=-\int_A^B\vec{E}\cdot d\vec{\ell},\quad \vec{E}=-\vec{\nabla}V,\quad d\vec{F}=Id\vec{\ell}\times\vec{B},\quad \vec{\mu}=I\vec{A},$$

$$\oint\vec{E}\cdot d\vec{A}=\frac{q_{int}}{\epsilon_0},\quad \oint\vec{B}\cdot d\vec{A}=0,\quad d\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2},\quad \oint\vec{E}\cdot d\vec{\ell}=-\frac{d}{dt}\int\vec{B}\cdot d\vec{A},$$

$$\mathcal{E}=-\frac{d\Phi_m}{dt},\quad \Phi^{total}=N\phi_{espira}=LI,\quad \Phi_{21}^{total}=N_2\phi_{espira}=M_{21}I_1,\ \ u_m=\frac{B^2}{2\mu_0},\ \ U=\frac{LI^2}{2},$$

$$\oint\vec{B}\cdot d\vec{\ell}=\mu_0 I+\mu_0\epsilon_0\frac{d}{dt}\int\vec{E}\cdot d\vec{A},\quad I=\int\vec{J}\cdot d\vec{A},\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\epsilon_0},\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0,\quad \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t},\quad \nabla^2\vec{E}=\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2},\quad \nabla^2\vec{B}=\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2},\quad c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}},\quad E=cB,$$

$$\vec{E}=E_m\cos(kx\pm\omega t+\phi)\,\widehat{\jmath},\quad \vec{B}=B_m\cos(kx\pm\omega t+\phi)\,\widehat{k},\quad k=\frac{2\pi}{\lambda},\quad \omega=\frac{2\pi}{T},\quad k\,c=\omega,$$

$$f=1/T,\quad \vec{S}=\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B},\quad S=uc,\quad u=u_e+u_m=\frac{\epsilon_0\,E^2}{2}+\frac{B^2}{2\mu_0},\quad I=<S>=\frac{E_m\,B_m}{2\mu_0},$$

$$<\cos^2(kx-\omega t+\phi)>=<\operatorname{sen}^2(kx-\omega t+\phi)>=1/2,\quad <\cos(kx-\omega t+\phi)\operatorname{sen}(kx-\omega t+\phi)>=0.$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}),\qquad \int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\sqrt{x^2+a^2}.$$

$$\int\frac{dx}{(c+x^2)^{3/2}}=\frac{x}{c\,(c+x^2)^{1/2}},$$