Física III - 4323203

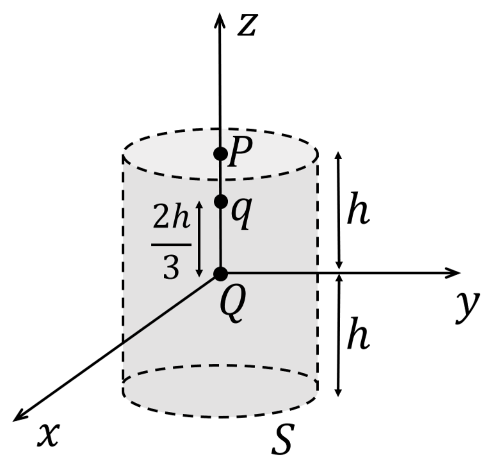
Escola Politécnica - 2022

GABARITO DA P1

5 de maio de 2022

Questão 1

Uma partícula com carga $+Q$ encontra-se na origem do sistema de coordenadas mostrado na figura.



(a) (0,5 ponto) Escreva a expressão do campo elétrico $\vec{E}_p$, devido à carga Q, no ponto P do eixo z, localizado a uma altura h do plano xy.

(b) (0,5 ponto) Qual carga q, colocada em $(0, 0, 2h/3)$, anula o fluxo do campo elétrico através da superfície cilíndrica fechada S que contém o ponto P?

(c) (1,0 ponto) Qual carga q, colocada em $(0, 0, 2h/3)$, anula o campo elétrico no ponto P?

Solução da questão 1

(a) O campo elétrico no ponto P devido a carga Q é:

$$\boxed{\vec{E}_p = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{k}}{h^2}}$$

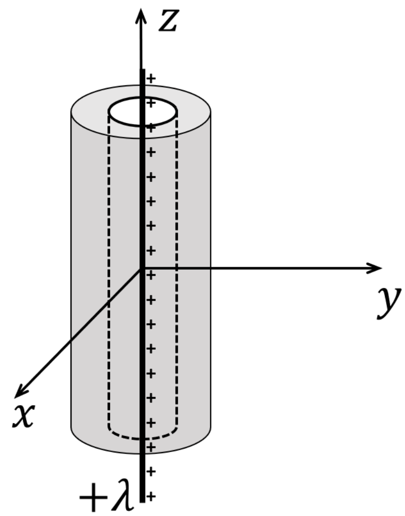
(b) Pela lei de Gauss, o fluxo do campo elétrico na superfície fechada S é zero se a carga interna total também for zero. Logo:

$$\boxed{q = -Q}$$

(c) $\vec{E}_p = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\hat{k}}{h^2} + \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\hat{k}}{(h/3)^2} = 0 \Rightarrow \boxed{q = -\dfrac{Q}{9}}$

Questão 2

Um fio infinito não condutor com densidade linear de carga $+\lambda$ está alinhado com o eixo z. Em torno do fio, há um tubo cilíndrico condutor de raio interno a, raio externo b e comprimento infinito. A carga total no tubo condutor é zero.



(a) (0,5 ponto) Calcule a densidade superficial de carga na parede interna e na parede externa do tubo.

(b) (1,5 ponto) Calcule o vetor campo elétrico nas regiões $0 < r < a$, $a < r < b$, e $r > b$, sendo $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

(c) (1,0 ponto) Calcule o potencial elétrico nas regiões $0 < r < a$, e $a < r < b$, sendo $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Considere que o potencial é igual a V_0 para $r = b$.

Solução da questão 2

(a) Para encontrar a densidade superficial de carga na parede interna do tubo vamos considerar uma superfície gaussiana de formato cilíndrico com altura h e raio r, sendo $a < r < b$. Como o campo elétrico no interior do condutor é zero, a carga total no interior da superfície gaussiana também deve ser zero. Logo:

$$q_{int} = \lambda h + 2\pi a h \sigma_a = 0 \Rightarrow \boxed{\sigma_a = \frac{-\lambda}{2\pi a}}$$

Considerando a conservação de carga elétrica, a carga total no interior do condutor deve ser zero. Logo:

$$\sigma_a 2\pi a h + \sigma_b 2\pi b h = 0 \Rightarrow \sigma_b = -\sigma_a \frac{a}{b} \Rightarrow \boxed{\sigma_b = \frac{+\lambda}{2\pi b}}$$

(b) <u>região $0 < r < a$</u>

Utilizando a Lei de Gauss a partir de uma superfície gaussiana em formato cilíndro com altura h e raio r, temos:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \tfrac{q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E 2\pi r h = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r}\hat{r}}$$

<u>região $a < r < b$</u>

O campo elétrico no condutor em equilíbrio eletrostático é zero. Logo: $\boxed{\vec{E} = 0}$

<u>região $r > b$</u>

Considerando uma superfície gaussiana em formato cilíndro com altura h e raio $r > b$, temos:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \tfrac{q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E 2\pi r h = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r}\hat{r}}$$

(c) <u>região $a < r < b$</u>

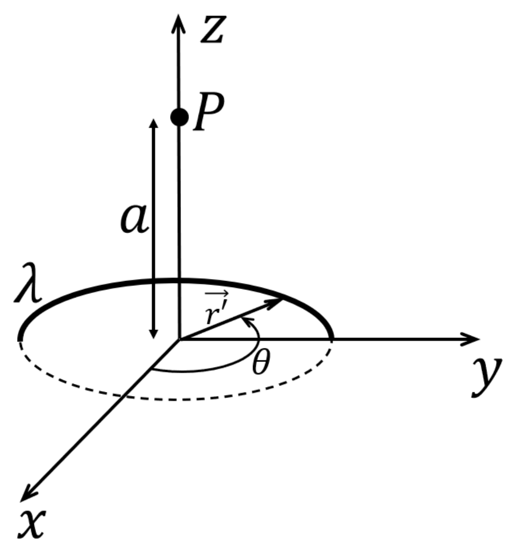
O potencial elétrico é constante no interior do condutor. Logo: $\boxed{V = V_0}$

<u>região $0 < r < a$</u>

$$V_0 - V(r) = -\int_r^a \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r}\hat{r} \cdot \hat{r} dr \Rightarrow \boxed{V(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln(a/r) + V_0}$$

Questão 3

A figura mostra um semi-anel de raio R e espessura desprezível localizado no plano xy, com o centro geométrico coincidindo com a origem do sistema de coordenadas adotado. O semi-anel é constituído por material dielétrico e encontra-se eletrizado com densidade linear de carga λ uniforme. (Dica: O vetor $\vec{r'}$ é dado por $\vec{r'} = R\cos\theta\hat{i} + R\,\mathrm{sen}\theta\hat{j}$)



(a) (1,0 ponto) Calcule o vetor campo elétrico $\vec{E}_p$ no ponto P do eixo z, localizado a uma altura a do plano do anel.

(b) (0,5 ponto) Verifique a dimensão da grandeza encontrada no item (a) acima, sabendo que a dimensão de ε_0 é $C^2/N.m^2$ (SI).

(c) (1,0 ponto) Expresse $\vec{E}_p$ em termos da carga total Q no semi-anel e interprete o resultado no limite em que $a \gg R$.

Solução da questão 3

(a) $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{(\vec{r}-\vec{r}')dq}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \Rightarrow \vec{E_P} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\pi/2}^{3\pi/2}(\frac{a\hat{k} - R\cos\theta\hat{i} - R\,\mathrm{sen}\theta\hat{j})}{(R^2+a^2)^{3/2}}\lambda R d\theta \Rightarrow$

$$\boxed{\vec{E_P} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda R}{(R^2+a^2)^{3/2}}(2R\hat{i} + \pi a\hat{k})}$$

(b) $[E_p] = \frac{C}{m}\frac{m}{\frac{C^2}{Nm^2}}\frac{m}{m^3} \Rightarrow \boxed{[E_P] = \frac{N}{C}}$

(c) A carga total do semi-anel é $Q = \pi R\lambda$. Logo:

$\vec{E_P} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda R}{(R^2+a^2)^{3/2}}(2R\hat{i} + \pi a\hat{k}) \Rightarrow \boxed{\vec{E_P} = \frac{1}{4\pi^2\varepsilon_0}\frac{Q}{(R^2+a^2)^{3/2}}(2R\hat{i} + \pi a\hat{k})}$

No Limite $a \gg R$:

$\vec{E_P} \approx \frac{1}{4\pi^2\varepsilon_0}\frac{Q}{a^3}(\pi a\hat{k}) \Rightarrow \boxed{\vec{E_P} \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a^2}\hat{k}}$

O campo elétrico acima equivale ao campo elétrico produzido por uma carga pontual localizada na origem do sistema de coordenadas.

Questão 4

(I) (1,5 ponto) Em um determinado sistema físico, o potencial elétrico em todo o espaço é dado por $V(x, y) = \alpha(xy - 2y^2)$ (SI), sendo α uma constante positiva. Se uma partícula pontual, de carga $+q$, for inserida na posição $(x, y) = (1\ \text{m}, 1\ \text{m})$, qual é a força elétrica que atua na partícula?

(II) (1,0 ponto) Um capacitor de placas paralelas é formado por duas placas retangulares, cada uma com área A, que estão separadas por uma distância d. Considerando que as duas placas estão no vácuo, <u>calcule</u> a capacitância do capacitor e a energia armazenada quando a diferença de potencial entre as placas for V. Despreze efeitos de borda.

Solução da questão 4

(I) A partir do potencial, podemos encontrar o vetor campo elétrico através de:

$\vec{E} = -\nabla V = -\alpha \left[y\hat{i} + (x - 4y)\hat{j} \right]$

Utilizando o campo elétrico acima, a força que atua na partícula de carga q, localizada em $(x, y) = (1 \text{ m}, 1 \text{ m})$ é

$\vec{F} = q\vec{E} = -q\alpha \left[\hat{i} - 3\hat{j} \right] \Rightarrow \boxed{\vec{F} = q\alpha \left[-\hat{i} + 3\hat{j} \right]}$

(II) Conforme visto em aula, o campo elétrico no interior do capacitor de placas paralelas é:

$E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} = \dfrac{Q}{A\varepsilon_0}$

Para este campo elétrico, a diferença de potencial entre as placas é:

$V = Ed = \dfrac{Qd}{A\varepsilon_0}.$

Logo: $C = \dfrac{Q}{V} = \dfrac{A\varepsilon_0}{d} \Rightarrow \boxed{C = \dfrac{A\varepsilon_0}{d}}$

A energia total armazenada no capacitor é:

$U = \dfrac{CV^2}{2} \Rightarrow \boxed{U = \dfrac{A\varepsilon_0 V^2}{2d}}$

Formulário

$$\vec{F} = \frac{qq'(\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \qquad \vec{F} = q\vec{E}, \quad \vec{E} = \frac{q(\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \qquad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}')dq}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3},$$

$$p = qd, \quad \vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}, \quad U = -\vec{p} \cdot \vec{E}, \quad \Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}, \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0},$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}, \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} V,$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}, \quad U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i<j} \frac{q_i\, q_j}{r_{ij}}, \quad C = Q/V, \quad C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots,$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots, \quad U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} = \frac{QV}{2}, \quad u = \frac{\epsilon_0}{2} E^2.$$