Física III - 4323203

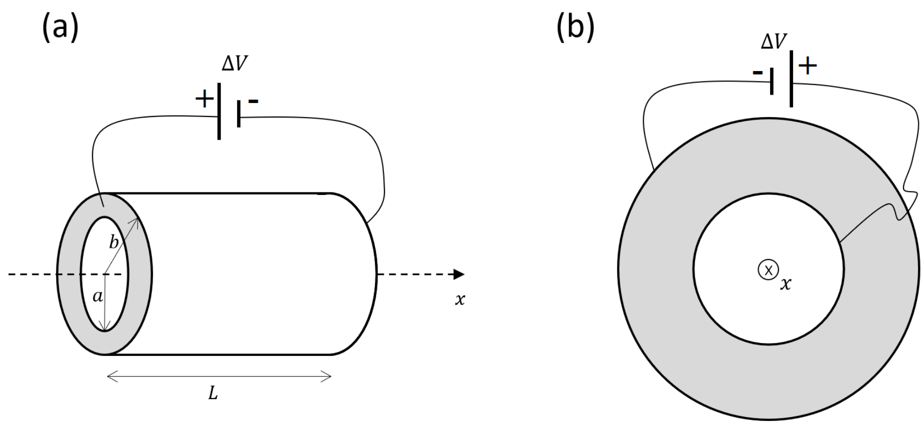
Escola Politécnica - 2022

GABARITO DA P2

9 de junho de 2022

Questão 1

Considere um tubo cilíndrico, formado por um material de condutividade elétrica σ, de comprimento L, raio interno a, e raio externo b, conforme indicado nas figuras (a) e (b).



(a) (1,0 ponto) Considerando a situação da Fig. (a), na qual uma diferença de potencial ΔV é aplicada entre as extremidades esquerda e direita do tubo, calcule a resistência elétrica e a corrente elétrica no tubo. Expresse sua resposta em termos de ΔV, L, σ, a e b.

(b) (1,0 ponto) Considerando a situação da Fig. (b), na qual uma diferença de potencial ΔV é aplicada entre as paredes interna ($r = a$) e externa ($r = b$) do tubo, calcule a resistência elétrica e a corrente elétrica no tubo. Expresse sua resposta em termos de ΔV, L, σ, a e b.

(c) (0,5 ponto) Na situação do item (b), calcule o vetor densidade de corrente a uma distância r do eixo de simetria do tubo para $a < r < b$.

Solução da questão 1

(a) A resistência ao longo do tubo pode ser calculada através de:

$$R = \int dR = \int_0^L \rho \frac{dx}{A} = \int_0^L \frac{dx}{\sigma\pi(b^2 - a^2)} = \frac{L}{\sigma\pi(b^2 - a^2)} \Rightarrow \boxed{R = \frac{L}{\sigma\pi(b^2 - a^2)}}$$

Utilizando a lei de Ohm, temos:

$$I = \frac{\Delta V}{R} = \frac{\Delta V \sigma\pi(b^2 - a^2)}{L} \Rightarrow \boxed{I = \frac{\Delta V \sigma\pi(b^2 - a^2)}{L}}$$

(b) Para o caso da corrente fluindo radialmente, temos:

$$R = \int dR = \int_a^b \rho \frac{dr}{A} = \int_a^b \frac{1}{\sigma} \frac{dr}{2\pi r L} = \frac{\ln(b/a)}{2\pi\sigma L} \Rightarrow \boxed{R = \frac{\ln(b/a)}{2\pi\sigma L}}$$

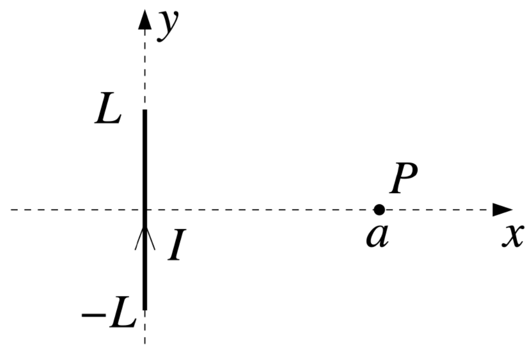
Utilizando a lei de Ohm, temos:

$$I = \frac{\Delta V}{R} = \frac{2\Delta V \pi\sigma L}{\ln(b/a)} \Rightarrow \boxed{I = \frac{2\Delta V \pi\sigma L}{\ln(b/a)}}$$

(c) $$\vec{J} = \frac{I}{A}\hat{r} = \frac{2\Delta V \pi\sigma L}{2\pi r L \ln(b/a)}\hat{r} \Rightarrow \boxed{\vec{J} = \frac{\Delta V \sigma}{r \ln(b/a)}\hat{r}}$$

Questão 2

Considere um fio retilíneo de comprimento $2L$, delgado, com uma corrente constante I, esticado ao longo do eixo y, como mostra a figura abaixo.



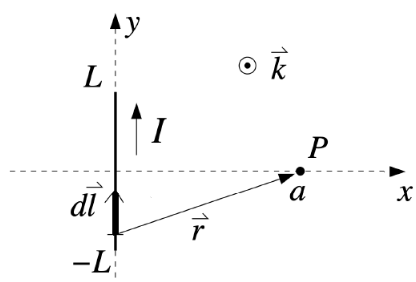
(a) (1,5 ponto) Utilizando a lei de Biot-Savart, calcule o vetor campo magnético $\vec{B}$ gerado pelo fio num ponto P do eixo x, localizado a uma distância a do fio.

(b) (1,0 ponto) Supondo agora que o fio seja infinitamente longo, calcule o vetor campo magnético $\vec{B}$ gerado pelo fio no ponto P usando a Lei de Ampère. Compare o resultado com o obtido fazendo o limite $L \gg a$ na expressão do item (a).

Solução da questão 2

(a) O campo magnético $d\vec{B}$ produzido pelo elemento infinitesimal de corrente $d\vec{\ell}$ é dado por

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2}$$



Observando a figura acima, podemos escrever:

$$d\vec{\ell} = dy\hat{j}$$

$$\vec{r} = a\hat{i} - y\hat{j}$$

$$r = \sqrt{a^2+y^2}$$

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{a\hat{i}-y\hat{j}}{\sqrt{a^2+y^2}}$$

Substituindo estas quantidades na Lei de Biot-Savart, temos:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-L}^{+L}\frac{d\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-L}^{+L}\frac{(dy\hat{j})\times(a\hat{i}-y\hat{j})}{(a^2+y^2)^{3/2}} = -\frac{\mu_0 I a\hat{k}}{4\pi}\int_{-L}^{+L}\frac{dy}{(a^2+y^2)^{3/2}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\frac{L}{\sqrt{a^2+L^2}}\hat{k}}$$

(b) Utilizando a Lei de Ampère, temos:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{int} \Rightarrow B2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \Rightarrow \boxed{\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\hat{k}}$$

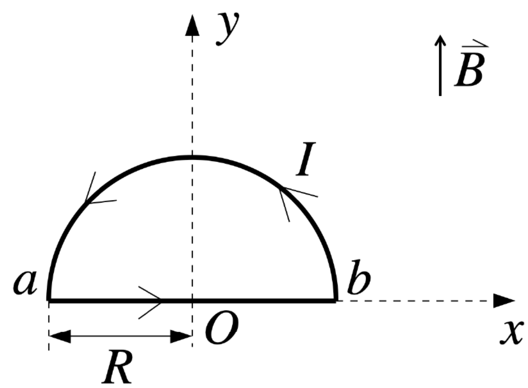
Fazendo o limite $L \gg a$ no resultado do item (a), encontramos:

$$\boxed{\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\hat{k}}$$

Este resultado é idêntico ao obtido utilizando a Lei de Ampère.

Questão 3

A figura abaixo mostra uma espira por onde passa uma corrente estacionária I no sentido anti-horário, numa região onde existe um campo magnético uniforme dado por $\vec{B} = B\hat{\jmath}$. A espira é formada por uma semi-circunferência de raio R e por um segmento retilíneo de comprimento $2R$, situado sobre o eixo x. (Dica: O elemento de linha infinitesimal na semi-circunferência é dado por $d\vec{l} = -R\,\mathrm{sen}\theta d\theta\hat{\imath} + R\cos\theta d\theta\hat{\jmath}$, onde o ângulo θ é medido a partir do eixo x).



(a) (1,0 ponto) Calcule o vetor força magnética resultante sobre o segmento reto da espira.

(b) (1,0 ponto) Calcule o vetor força magnética resultante sobre o segmento semi-circular da espira.

(c) (0,5 ponto) Calcule a força total sobre a espira e o torque que age sobre ela.

Solução da questão 3

(a) No trecho reto, temos:

$$\vec{F} = \int I d\vec{\ell} \times \vec{B} = I \int_{-R}^{+R} (dx\hat{\imath}) \times (\vec{B}\hat{\jmath}) = 2IBR\hat{k} \Rightarrow \boxed{\vec{F} = 2IBR\hat{k}}$$

(b) No trecho circular, a força é dada por:

$$\vec{F} = \int I d\vec{\ell} \times \vec{B} = I \int_{0}^{\pi} (-R\,\mathrm{sen}\theta d\theta\hat{\imath} + R\cos\theta d\theta\hat{\jmath}) \times (\vec{B}\hat{\jmath}) = -IBR\hat{k} \int_{0}^{\pi} \mathrm{sen}\theta d\theta \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{F} = -2IBR\hat{k}}$$

Solução alternativa: A força total produzida por um campo magnético uniforme em uma espira fechada é zero. Logo a força sobre o trecho circular pode ser obtida através da multiplicação do resultado do item (a) por -1, ou seja:

$$\boxed{\vec{F} = -2IBR\hat{k}}$$

(c) Somando as forças obtidas nos itens (a) e (b), obtemos:

$$\boxed{\vec{F} = 0}$$

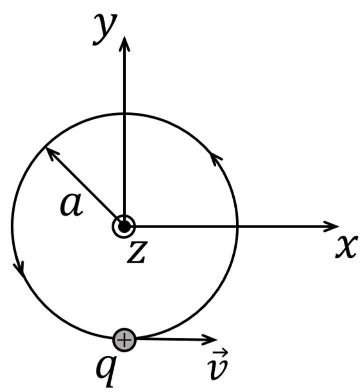
O torque pode ser calculado através de:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} = \frac{I\pi R^2\hat{k}}{2} \times (\vec{B}\hat{\jmath}) \Rightarrow \boxed{\vec{\tau} = -\frac{I\pi BR^2}{2}\hat{\imath}}$$

Questão 4

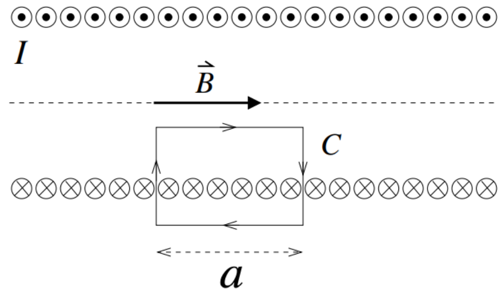
(I) (1,5 ponto) Calcule o módulo do campo magnético no interior de um solenóide linear muito longo, de comprimento L e contendo N espiras, sendo que o solenóide é percorrido por uma corrente estacionária I.

(II) (1,0 ponto) Uma partícula de carga $+q$ realiza um movimento circular em um campo magnético uniforme, dado por $\vec{B} = -B_0\hat{k}$. Considerando que o raio da trajetória circular é a e o módulo da velocidade da partícula é v, calcule a razão entre a carga q e a massa m da partícula.



Solução da questão 4

(I) Neste solenóide, o número de espiras n por unidade de comprimento é $n = N/L$.



Utilizando a lei de Ampère, com o caminho C acima, temos:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{int} \Rightarrow Ba = \mu_0 Ina \Rightarrow Ba = \mu_0 \frac{INa}{L} \Rightarrow \boxed{B = \mu_0 \frac{IN}{L}}$$

(II) Igualando a força magnética com a força centrípeta, temos:

$$F_B = F_{cp} \Rightarrow qvB_0 = \frac{mv^2}{a} \Rightarrow \boxed{\frac{q}{m} = \frac{v}{aB_0}}$$

Formulário

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} V, \quad dR = \rho \frac{d\ell}{A}, \quad R = \int dR, \quad V = RI, \quad \vec{J} = \sigma \vec{E} = \frac{1}{\rho} \vec{E},$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0, \quad d\vec{F} = I d\vec{\ell} \times \vec{B}, \quad \vec{\mu} = I\vec{A}, \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2}, \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{int}.$$

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}, \quad d\vec{\tau} = \vec{r} \times d\vec{F}, \quad \vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}, \quad U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B},$$

$$\int \frac{dx}{(c + x^2)^{3/2}} = \frac{x}{c\,(c + x^2)^{1/2}}, \quad \int \frac{x\,dx}{(c + x^2)^{3/2}} = -\frac{1}{(c + x^2)^{1/2}}.$$