Física III - 4323203

Escola Politécnica - 2022

GABARITO DA P3

14 de julho de 2022

Questão 1

Considere um solenóide ideal de N espiras, raio a e comprimento $\ell \gg a$, por onde passa uma corrente elétrica I.

[Dado: Magnitude do campo magnético no interior do solenóide ideal: $B = \mu_0 I N/\ell$].

(a) (0,5 ponto) Determine o fluxo magnético através de uma única espira do solenóide.

(b) (1,0 ponto) Determine a auto-indutância do solenóide.

(c) (0,5 ponto) Determine a energia magnética dentro do solenóide.

Para os itens (d) e (e), suponha que a corrente elétrica no solenóide varia no tempo como $I(t) = \beta t$, onde $\beta > 0$ é uma constante positiva.

(d) (1,0 ponto) Calcule o módulo do campo elétrico no interior do solenóide para uma distância radial r do centro do solenóide.

(e) (1,0 ponto) Um anel circular de cobre com raio $b < a$ é posicionado no interior do solenóide, paralelamente às espiras do solenóide, de forma que o eixo do solenóide passe pelo centro do anel. Considerando que o anel possui resistência R, calcule a corrente induzida no anel.

Solução da questão 1

(a) O fluxo do campo magnético sobre uma espira do solenóide é:

$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = BA = \left(\frac{\mu_0 IN}{\ell}\right) \pi a^2 = \frac{\mu_0 IN\pi a^2}{\ell} \Rightarrow \boxed{\Phi_B = \dfrac{\mu_0 IN\pi a^2}{\ell}}$

(b) O fluxo do campo magnético sobre as N espiras do solenóide é:

$\Phi_B = N \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = NBA = N\left(\frac{\mu_0 IN}{\ell}\right) \pi a^2 = \frac{\mu_0 IN^2\pi a^2}{\ell}$

Portanto a indutância $L = \Phi_B / I \Rightarrow \boxed{L = \dfrac{\mu_0 N^2 \pi a^2}{\ell}}$

(c) A energia magnética dentro do solenóide é

$U_B = \frac{1}{2} L I^2 \quad \rightarrow \quad \boxed{U_B = \dfrac{\mu_0 I^2 N^2 \pi a^2}{2\ell}}$

Solução alternativa:

$U_B = \int u_B dV = u_B(\pi a^2 \ell)$, sendo $u_B = B^2/2\mu_0$.

Logo: $\boxed{U_B = \dfrac{\mu_0 I^2 N^2 \pi a^2}{2\ell}}$

(d) O fluxo magnético através de uma superfície circular de raio r é:

$\Phi_B(t) = \frac{\mu_0 I(t) N \pi r^2}{\ell} = \frac{\mu_0 \beta t N \pi r^2}{\ell}$

Portanto

$\frac{d\phi_B(t)}{dt} = \frac{\mu_0 \beta N \pi r^2}{\ell}$

Da Lei de Faraday, temos

$\oint_C \vec{E} \cdot d\ell = -\frac{d\Phi_B(t)}{dt}$

$|\vec{E}|(2\pi r) = \frac{\mu_0 \beta N \pi r^2}{\ell}$

Portanto $\boxed{|\vec{E}| = \dfrac{\mu_0 \beta N \pi r}{2\pi\ell}}$

(e) O fluxo magnético através da espira circular de raio b é:

$\Phi_B(t) = \frac{\mu_0 I(t) N \pi b^2}{\ell} = \frac{\mu_0 \beta t N \pi b^2}{\ell}$

Da Lei de Faraday, temos

$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B(t)}{dt} \Rightarrow |\varepsilon| = \frac{\mu_0 \beta N \pi b^2}{\ell}$

Finalmente, temos $I = \varepsilon / R \Rightarrow \boxed{I = \dfrac{\mu_0 \beta N \pi b^2}{\ell R}}$

Questão 2

O campo elétrico de uma onda eletromagnética plana se propagando no vácuo é dado por $\vec{E} = -E_0 \sin[k(x + ct)]\hat{\jmath}$.

(a) (1,0 ponto) Determine o <u>vetor</u> campo magnético desta onda.

(b) (1,0 ponto) Determine o <u>vetor</u> de Poynting desta onda.

(c) (1,5 ponto) Considerando que a onda incide normalmente sobre uma placa perfeitamente absorvedora de área A, calcule a energia transferida à placa durante um intervalo de tempo correspondente a 4 períodos. Expresse sua resposta em termos das grandezas dadas acima.

Solução da questão 2

(a) Temos $\vec{B} = \hat{c} \times \vec{E}/c$ e $\hat{c} = -\hat{\imath}$, logo $\boxed{\vec{B} = \dfrac{E_0}{c} \sin[k(x+ct)]\hat{k}}$

(b) $\vec{S} = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{S} = -\dfrac{E_0^2}{c\mu_0} \sin^2[k(x+ct)]\hat{\imath}}.$

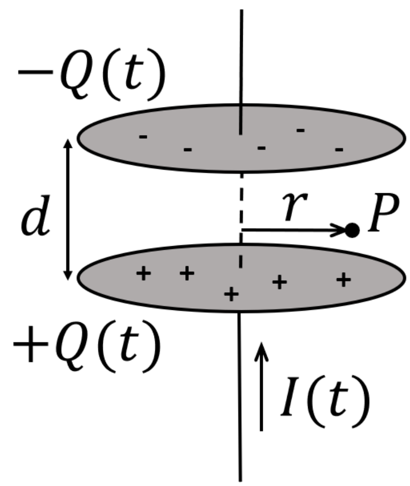
(c) Período $T = 2\pi/\omega = 2\pi/kc$. Pulso com duração $\Delta t = 4T = 8\pi/kc$. Densidade de energia: $u = \frac{U}{V} = \frac{U}{Ac\Delta t}$, e além disso $u = \frac{\langle S\rangle}{c}$. Portanto

$$U = A\langle S\rangle \Delta t = A\ \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}\ \frac{8\pi}{kc} \quad \rightarrow \quad \boxed{U = \frac{4\pi A E_0^2}{\mu_0 k c^2}}$$

Questão 3

(I) (1,5 ponto) Um capacitor formado por duas placas circulares paralelas é conectado a uma bateria em $t = 0$ s. Cada placa possui área A e estão separadas por uma distância d. Para $t > 0$, antes que o capacitor esteja completamente carregado, uma corrente $I(t)$ flui através do circuito. Esta corrente é responsável pelo acúmulo de cargas, $Q(t)$, nas placas do capacitor. Desprezando efeitos de borda, calcule o módulo do campo magnético no interior do capacitor (ponto P) a uma distância r do eixo central.

[Dado: O campo elétrico $E(t)$ no interior do capacitor é dado por $Q(t)/(\varepsilon_0 A)$].



(II) (1,0 ponto) Em um sistema, o campo elétrico é $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z) = (\alpha x + \beta xyt, 0, 0)$ e o campo magnético é igual a $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z) = (ay, 0, bxt^2)$, onde α, β, a, b são constantes, (x, y, z) denotam coordenadas cartesianas e t o tempo. Determine o <u>vetor</u> densidade de corrente de condução do sistema.

Solução da questão 3

(I) O campo elétrico no interior do capacitor é dado por:

$$E(t) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q(t)}{\varepsilon_0 A}$$

Aplicando a Lei de Ampère-Maxwell, temos:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \tfrac{d}{dt} \int \vec{E} \cdot d\vec{A}, \quad \Rightarrow B 2\pi r = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt}(E\pi r^2) \Rightarrow$$

$$B 2\pi r = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt}(E\pi r^2) \Rightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0 r}{2A}\frac{dQ}{dt} = \frac{\mu_0 r}{2A} I}$$

(II) Note que $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, como esperado. Por outro lado, temos

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \left(\tfrac{\partial B_z}{\partial y} - \tfrac{\partial B_y}{\partial z}, \tfrac{\partial B_x}{\partial z} - \tfrac{\partial B_z}{\partial x}, \tfrac{\partial B_y}{\partial x} - \tfrac{\partial B_x}{\partial y} \right) = (0, -bt^2, -a)$$

e

$$\tfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \left(\tfrac{\partial E_x}{\partial t}, \tfrac{\partial E_y}{\partial t}, \tfrac{\partial E_z}{\partial t} \right) = (\beta x y, 0, 0)$$

A Lei de Ampère-Maxwell $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \partial \vec{E}/\partial t$ implica em

$$\vec{J} = \tfrac{\vec{\nabla} \times \vec{B}}{\mu_0} - \epsilon_0 \tfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{J} = \left(-\epsilon_0 \beta x y, -\frac{bt^2}{\mu_0}, -\frac{a}{\mu_0} \right)}$$

Formulário

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt}, \quad d\vec{F} = I d\vec{\ell} \times \vec{B}, \quad \Phi^{total} = LI, \quad \Phi_{21}^{total} = M_{21} I_1 = M I_1, \quad u_m = \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad U = \frac{LI^2}{2},$$

$$u_e = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}, \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}, \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0, \;\; \mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = -\frac{d\Phi_m}{dt},$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int \vec{E} \cdot d\vec{A}, \quad I = \int \vec{J} \cdot d\vec{A}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}, \quad E = cB,$$

$$\vec{E} = E_m \cos(kx \pm \omega t + \phi)\hat{\jmath}, \quad \vec{B} = B_m \cos(kx \pm \omega t + \phi)\hat{k}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad k\,c = \omega,$$

$$f = 1/T, \quad \vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}, \quad S = uc, \quad u = u_e + u_m = \frac{\epsilon_0\, E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad I = < S > = \frac{E_m\, B_m}{2\mu_0},$$

$$< \cos^2(kx - \omega t + \phi) > = < \operatorname{sen}^2(kx - \omega t + \phi) > = 1/2, \quad < \cos(kx - \omega t + \phi) \operatorname{sen}(kx - \omega t + \phi) > = 0,$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right), \quad \cos A - \cos B = 2\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right).$$

$$\sin A + \sin B = 2\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Dado um campo vetorial $\vec{A} = A_x \hat{\imath} + A_y \hat{\jmath} + A_z \hat{k}$, o rotacional do campo é dado por:

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \widehat{\imath} & \widehat{\jmath} & \widehat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$