Física III - 4323203

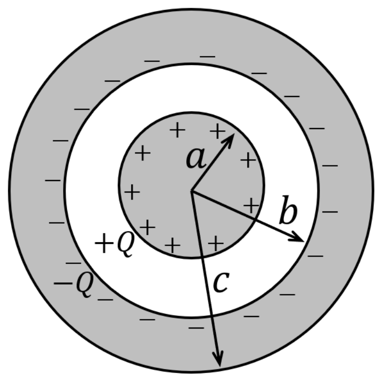
Escola Politécnica - 2022

GABARITO DA REC

28 de julho de 2022

Questão 1

Um capacitor é formado por uma esfera sólida condutora de raio a, com carga $+Q$, e por uma casca esférica condutora, de raio interno b e raio externo c, que está eletrizada com carga $-Q$, conforme ilustrado na figura abaixo.



(a) (1,0 ponto) Determine o vetor campo elétrico nas regiões $r < a$, $a < r < b$, $b < r < c$, e $r > c$.

(b) (1,0 ponto) Assumindo que o potencial elétrico em $r = c$ é igual a 0 V, calcule o potencial nas regiões $r < a$ e $a < r < b$.

(c) (0,5 ponto) Calcule a capacitância deste capacitor.

Solução da questão 1

(a) <u>região $r < a$</u>

O campo elétrico no condutor em equilíbrio eletrostático é zero. Logo: $\boxed{\vec{E} = 0}$

<u>região $a < r < b$</u>

Utilizando a Lei de Gauss a partir de uma superfície gaussiana em formato esférico de raio r, temos:

$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E4\pi r^2 = \dfrac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}}$

<u>região $b < r < c$</u>

O campo elétrico no condutor em equilíbrio eletrostático é zero. Logo: $\boxed{\vec{E} = 0}$

<u>região $r > c$</u>

Utilizando a Lei de Gauss a partir de uma superfície gaussiana em formato esférico de raio r, temos:

$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E4\pi r^2 = \dfrac{0}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = 0}$

(b) <u>região $a < r < b$</u>

O potencial elétrico é constante no interior do condutor, logo o potencial é nulo em $r = b$

$V_b - V(r) = -\int_r^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \Rightarrow V(r) = \int_r^b \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr \Rightarrow V(r) = -\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b} + \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \Rightarrow$
$\boxed{V(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{b}\right)}$

<u>região $r < a$</u>

O potencial em $r = a$ é:

$V(r = a) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)$

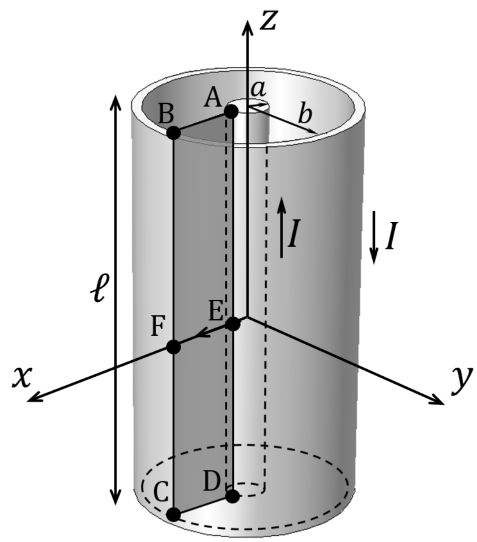
Como o potencial elétrico é constante no interior do condutor, obtemos, para a região $r < a$:

$$\boxed{V = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)}$$

(c) $C = \dfrac{Q}{V} \Rightarrow \boxed{C = \dfrac{4\pi\varepsilon_0}{\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)}}$

Questão 2

Um cabo coaxial muito longo, de comprimento ℓ, é formado por um condutor cilíndrico de raio a e por uma casca condutora cilíndrica de raio b, conforme ilustrado na figura abaixo. Pelo condutor interno flui uma corrente I no sentido de z positivo e pela casca externa flui uma corrente I no sentido de z negativo.



(a) (1,0 ponto) Calcule o vetor campo magnético na região $a < r < b$.

(b) (1,0 ponto) Calcule o fluxo do campo magnético na superfície delimitada pelos pontos ABCD, onde A = $(a, 0, \ell/2)$, B = $(b, 0, \ell/2)$, C = $(b, 0, -\ell/2)$, e D = $(a, 0, -\ell/2)$.

(c) (0,5 ponto) Calcule $\int \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$ ao longo do caminho aberto EF (com a orientação de E para F), onde E = $(a, 0, 0)$ e F = $(b, 0, 0)$.

Solução da questão 2

(a) Utilizando a lei de Ampère, temos:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{int} \Rightarrow B 2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\phi}}$$

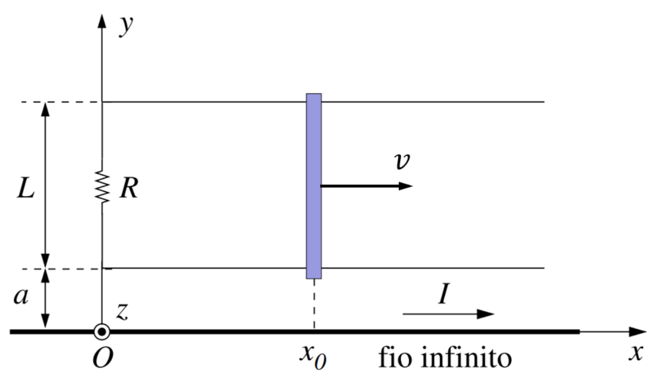
(b) $$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_a^b B\ell dr = \int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\ell dr = \frac{\mu_0 I \ell}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \Rightarrow \boxed{\Phi_B = \frac{\mu_0 I \ell}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

(c) Como o vetor campo magnético $\vec{B}$ é perpendicular ao vetor $d\vec{\ell}$, temos:

$$\boxed{\int \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0}$$

Questão 3

Uma barra vertical de comprimento L e resistência desprezível desliza com velocidade v constante sobre dois trilhos paralelos, conforme ilustrado na figura abaixo. As extremidades do lado esquerdo de cada trilho estão conectadas a um resistor de resistência R, formando assim um circuito fechado. Próximo do trilho inferior, a uma distância a, há um fio horizontal infinito, por onde passa uma corrente I.
[Dado: O campo magnético gerado pelo fio infinito é $\vec{B} = \mu_0 I \hat{\phi}/(2\pi r)$, onde r é a distância até o fio.]



(a) (1,0 ponto) Calcule a força eletromotriz induzida no circuito.

(b) (1,0 pontos) Calcule o valor da corrente induzida no circuito e determine o seu sentido (horário ou anti-horário). Justifique sua resposta.

(b) (0,5 pontos) Calcule a potência dissipada no resistor de resistência R.

Solução da questão 3

(a) Considerando que a barra vertical se encontra na posição x_0 em $t = 0$, O fluxo magnético é dado por:

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_a^{a+L} \int_0^{vt+x_0} \left(\frac{\mu_0 I \hat{k}}{2\pi y} \right) \cdot (dxdy\hat{k}) = (vt + x_0)\frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_a^{a+L} \frac{1}{y} dy \Rightarrow$$

$$\Phi_B = (vt + x_0)\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{a+L}{a}\right).$$

Utilizando a lei de Faraday, temos:

$$|\varepsilon| = \frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln\left(\frac{a+L}{a}\right) \Rightarrow \boxed{|\varepsilon| = \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln\left(\frac{a+L}{a}\right)}$$

(b) Utilizando a lei de Ohm, encontramos

$$I = |\varepsilon|/R = \frac{\frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln\left(\frac{a+L}{a}\right)}{R} \Rightarrow \boxed{I = \frac{\mu_0 I v}{2\pi R} \ln\left(\frac{a+L}{a}\right)}$$

E pela lei de Lenz, a corrente induzida está no <u>sentido horário</u>.

(c) $P = |\varepsilon| I \Rightarrow \boxed{P = \frac{1}{R}\left[\frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln\left(\frac{a+L}{a}\right)\right]^2}$

Questão 4

O campo elétrico de uma onda eletromagnética plana se propagando no vácuo é dado por $\vec{E} = E_0 \operatorname{sen}[k(z - ct)]\hat{\imath}$.

(a) (0,5 ponto) Determine o vetor campo magnético desta onda.

(b) (1,0 ponto) Determine o vetor de Poynting desta onda.

(c) (1,0 ponto) Considerando que a onda incide normalmente sobre um disco perfeitamente absorvedor de raio R, calcule a energia transferida ao disco durante um intervalo de tempo correspondente a 2 períodos. Expresse sua resposta em termos das grandezas dadas acima.

Solução da questão 4

(a) Temos $\vec{B} = \hat{c} \times \vec{E}/c$ e $\hat{c} = +\hat{k}$, logo $\boxed{\vec{B} = \dfrac{E_0}{c}\,\mathrm{sen}[k(z-ct)]\hat{\jmath}}$

(b) $\vec{S} = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{S} = \dfrac{E_0^2}{c\mu_0}\,\mathrm{sen}^2[k(z-ct)]\hat{k}}$.

(c) Período $T = 2\pi/\omega = 2\pi/kc$. Pulso com duração $\Delta t = 2T = 4\pi/kc$. Densidade de energia: $u = \frac{U}{V} = \frac{U}{Ac\Delta t}$, e além disso $u = \frac{\langle S\rangle}{c}$. Portanto

$$U = A\langle S\rangle\Delta t = A\,\frac{E_0^2}{2\mu_0 c}\,\frac{4\pi}{kc} \quad \Rightarrow \quad \boxed{U = \frac{2\pi^2 R^2 E_0^2}{\mu_0 k c^2}}$$

Formulário

$$\vec{F} = \frac{qq'(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3}, \qquad \vec{F} = q\vec{E}, \quad \vec{E} = \frac{q(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3}, \qquad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{r^2}\hat{r}, \qquad V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|},$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{r}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V, \quad U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i<j}\frac{q_i\,q_j}{r_{ij}}, \quad dA = 2\pi r dr(\text{coordenadas} \quad \text{polares})$$

$$C = Q/V, \quad W = q\Delta V, \quad V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{\ell}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V, \quad d\vec{F} = Id\vec{\ell}\times\vec{B}, \quad \vec{\mu} = I\vec{A},$$

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}, \quad \oint \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0, \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2}, \quad \oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int\vec{B}\cdot d\vec{A},$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt}, \quad \Phi^{total} = N\phi_{espira} = LI, \quad \Phi_{21}^{total} = N_2\phi_{espira} = M_{21}I_1, \ \ u_m = \frac{B^2}{2\mu_0}, \ \ U = \frac{LI^2}{2},$$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0\epsilon_0\frac{d}{dt}\int\vec{E}\cdot d\vec{A}, \quad I = \int\vec{J}\cdot d\vec{A}, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}, \quad \nabla^2\vec{E} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}, \quad \nabla^2\vec{B} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}, \quad E = cB,$$

$$\vec{E} = E_m\cos(kx\pm\omega t+\phi)\,\hat{\jmath}, \quad \vec{B} = B_m\cos(kx\pm\omega t+\phi)\,\hat{k}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad k\,c = \omega,$$

$$f = 1/T, \quad \vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}, \quad S = uc, \quad u = u_e + u_m = \frac{\epsilon_0\,E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad I = < S > = \frac{E_m\,B_m}{2\mu_0},$$

$$< \cos^2(kx-\omega t+\phi) > = < \text{sen}^2(kx-\omega t+\phi) > = 1/2, \quad < \cos(kx-\omega t+\phi)\ \text{sen}(kx-\omega t+\phi) > = 0.$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right), \quad \cos A - \cos B = 2\,\text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right).$$

$$\sin A + \sin B = 2\,\text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}), \quad \int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sqrt{x^2+a^2}.$$

$$\int\frac{dx}{(c+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{c\,(c+x^2)^{1/2}},$$