Física III - 4323203

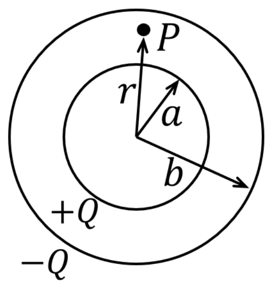
Escola Politécnica - 2022

GABARITO DA SUB

21 de julho de 2022

Questão 1

Um capacitor esférico é constituído por duas cascas esféricas metálicas concêntricas de raios a e b com $a < b$, eletrizadas com cargas $+Q$ e $-Q$. Na situação em que a carga da casca de raio b for $-Q < 0$,



(a) (1,0 ponto) Calcule o vetor campo elétrico em um ponto P, localizado a uma distância r do centro geométrico do capacitor, tal que $a < r < b$.

(b) (1,0 ponto) Calcule a diferença de potencial entre as placas do capacitor.

(c) (0,5 ponto) Calcule a capacitância deste capacitor.

Solução da questão 1

(a) Utilizando a lei de Gauss, temos:

$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n} dA = q_{int}/\varepsilon_0 \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}}$$

(b) $$\Delta V = -(V_B - V_A) = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \Rightarrow \Delta V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^b \frac{dr}{r^2} \Rightarrow \boxed{\Delta V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}$$

(c) $$C = \frac{Q}{\Delta V} \Rightarrow \boxed{C = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}}$$

Questão 2

Em um fio muito longo de raio R, centrado ao longo do eixo z, passa uma corrente I (no sentido de z positivo). A corrente elétrica está distribuída no fio de tal forma que a densidade de corrente $\vec{J}$ é dada por $\vec{J}(r) = Kr^2\hat{k}$ na região $0 \leq r \leq R$, onde K é uma constante positiva.

(a) (0,5 ponto) Determine a dimensão da constante K no sistema internacional de unidades.

(b) (1,0 ponto) Determine a corrente total I que passa pelo fio. Expresse sua resposta em termos de K e R.

(c) (1,0 ponto) Encontre o vetor campo magnético $\vec{B}$ nas regiões $0 \leq r \leq R$ e $r > R$. Expresse sua resposta em termos de K, R, e r.

Solução da questão 2

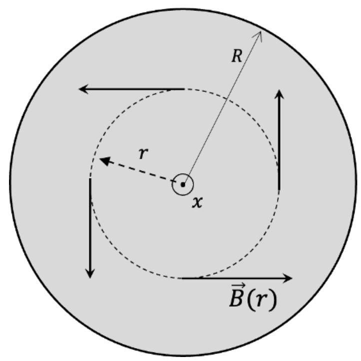
(a) $[K] = \dfrac{A/m^2}{m^2} \Rightarrow \boxed{[K] = \dfrac{A}{m^4} = \dfrac{C}{sm^4}}$

(b) $I = \int \vec{J}(r) \cdot d\vec{A} = \int_0^R (Kr^2\hat{k}) \cdot (2\pi r dr \hat{k}) = 2\pi K \int_0^R r^3 dr = \dfrac{\pi K R^4}{2} \Rightarrow \boxed{I = \dfrac{\pi K R^4}{2}}$,

(c) Dada a simetria do problema, podemos usar a lei de Ampère para encontrar o campo magnético:

$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$

Como mostra a figura a seguir, o vetor $\vec{B}(r)$ aponta para a direção tangencial e possui módulo constante ao longo da circunferência de raio r.



Utilizando a lei de Ampère com o caminho indicado na figura, temos:

<u>região $0 \leq r \leq R$</u>

$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I \Rightarrow B2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow B2\pi r = \mu_0 \int \vec{J}(r) \cdot d\vec{A} \Rightarrow B2\pi r = \mu_0 \dfrac{\pi K r^4}{2} \Rightarrow$

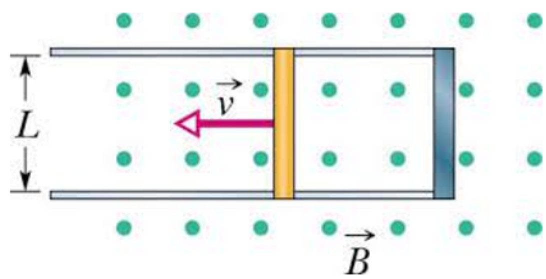
$\Rightarrow B = \dfrac{\mu_0 K r^3}{4} \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \dfrac{\mu_0 K r^3}{4}\hat{\theta}}$

<u>região $r > R$</u>

$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I \Rightarrow B2\pi r = \mu_0 \dfrac{\pi K R^4}{2} \Rightarrow B = \mu_0 \dfrac{K R^4}{4r} \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \mu_0 \dfrac{K R^4}{4r}\hat{\theta}}$

Questão 3

Uma barra vertical de comprimento L e resistência R desliza com velocidade $\vec{v}$ constante sobre dois trilhos paralelos de resistência desprezível, conforme ilustrado na figura abaixo. As extremidades do lado direito de cada trilho estão conectadas por meio de um condutor vertical de resistência desprezível, formando assim um circuito fechado. Todo o conjuto é submetido a um campo magnético uniforme $\vec{B}$, que aponta para fora do página.



(a) (1,0 ponto) Calcule a força eletromotriz induzida no circuito.

(b) (0,5 pontos) Calcule o valor da corrente induzida no circuito e determine o seu sentido (horário ou anti-horário). Justifique sua resposta.

(c) (0,5 pontos) Qual a potência dissipada na barra vertical de resistência R.

(d) (0,5 pontos) Calcule o módulo da força externa exercida na barra para manter sua velocidade constante.

Solução da questão 3

(a) O fluxo magnético é dado por:

$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = BL(vt + C)$,

onde C é uma constante

Utilizando a lei de Faraday, temos:

$|\varepsilon| = \dfrac{d\Phi_B}{dt} = BLv \Rightarrow \boxed{|\varepsilon| = BLv}$

(b) Utilizando a lei de Ohm, encontramos

$I = |\varepsilon|/R = \dfrac{BLv}{R} \Rightarrow \boxed{I = \dfrac{BLv}{R}}$

E pela lei de Lenz, a corrente induzida está no <u>sentido horário</u>.

(c) $P = |\varepsilon| I \Rightarrow \boxed{P = \dfrac{(BLv)^2}{R}}$

(d) A força magnética que atua na barra aponta para o lado direito e é calculada da seguinte forma:

$\vec{F}_B = \int I d\vec{\ell} \times \vec{B} \Rightarrow F_B = |\vec{F}_B| = ILB = \dfrac{B^2L^2v}{R}$

Como a força resultante que atua na barra deve ser zero para que a velocidade seja constante, a força externa deve ser oposta à força magnética. Portanto, a força externa aponta para a esquerda e seu módulo é:

$\boxed{F_{ext} = \dfrac{B^2L^2v}{R}}$

Questão 4

O campo elétrico de uma onda eletromagnética que se propaga no vácuo é dado por $\vec{E}(x,t) = E_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t)\hat{\jmath} + E_0 \operatorname{sen}(kx + \omega t)\hat{\jmath}$

(a) (1,0 ponto) Determine o vetor campo magnético desta onda..

(b) (1,0 ponto) Determine o vetor de Poynting $\vec{S}$ da onda.

(c) (0,5 ponto) Determine a média temporal do vetor de Poynting $\langle \vec{S} \rangle$ durante um período de oscilação da onda.

Solução da questão 4

(a) Esta onda envolve a superposição entre duas ondas progressivas que viajam em sentidos contrário. O campo magnético correspondente é obtido através de:

$\vec{B} = \frac{\hat{i}}{c} \times \vec{E_+} - \frac{\hat{i}}{c} \times \vec{E_-}$,

onde $\vec{E_+}$ representa o campo elétrico da onda que viaja no sentido positivo de x e $\vec{E_-}$ o campo elétrico da onda que viaja em sentido contrário. Logo:

$\vec{B} = \frac{\hat{i}}{c} \times [E_0 \,\mathrm{sen}(kx - \omega t)\hat{j}] - \frac{\hat{i}}{c} \times [E_0 \,\mathrm{sen}(kx + \omega t)\hat{j}] \Rightarrow$

$\boxed{\vec{B} = \frac{E_0}{c} \,\mathrm{sen}(kx - \omega t)\hat{k} - \frac{E_0}{c} \sin(kx + \omega t)\hat{k}}$

Solução alternativa: O campo elétrico também pode ser expresso através da seguinte expressão:

$\vec{E} = 2E_0 \,\mathrm{sen}(kx) \cos(\omega t)\hat{j}$

Utilizando a Lei de Faraday na forma diferencial, obtemos:

$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow 2E_0 k \cos(kx) \cos(\omega t)\hat{k} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \boxed{\vec{B} = -\frac{2E_0}{c} \cos(kx) \,\mathrm{sen}(\omega t)\hat{k}}$

(b) $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0}[E_0 \,\mathrm{sen}(kx - \omega t)\hat{j} + E_0 \,\mathrm{sen}(kx + \omega t)\hat{j}] \times [\frac{E_0}{c} \,\mathrm{sen}(kx - \omega t)\hat{k} - \frac{E_0}{c} \,\mathrm{sen}(kx + \omega t)\hat{k}] \Rightarrow \boxed{\vec{S} = \frac{E_0^2}{c\mu_0}[\,\mathrm{sen}^2(kx - \omega t)\hat{i} - \,\mathrm{sen}^2(kx + \omega t)\hat{i}]}$

Solução alternativa:

$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0}[2E_0 \,\mathrm{sen}(kx) \cos(\omega t)\hat{j}] \times [-\frac{2E_0}{c} \cos(kx) \,\mathrm{sen}(\omega t)\hat{k}] \Rightarrow$

$\vec{S} = -\frac{4E_0^2}{c\mu_0} \,\mathrm{sen}(kx) \cos(kx) \,\mathrm{sen}(\omega t) \cos(\omega t)\hat{i} \Longrightarrow \boxed{\vec{S} = -\frac{E_0^2}{c\mu_0} \,\mathrm{sen}(2kx) \,\mathrm{sen}(2\omega t)\hat{i}}$

(c) $\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \vec{S} dt \Rightarrow \boxed{\langle \vec{S} \rangle = 0}$

Formulário

$$\vec{F} = \frac{qq'(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3}, \qquad \vec{F} = q\vec{E}, \quad \vec{E} = \frac{q(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3}, \qquad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r^2}\hat{r}, \qquad V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|},$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V, \quad U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i<j}\frac{q_i\,q_j}{r_{ij}}, \quad dA = 2\pi r dr (\text{coordenadas} \quad \text{polares})$$

$$C = Q/V, \quad W = q\Delta V, \quad V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{\ell}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V, \quad d\vec{F} = Id\vec{\ell}\times\vec{B}, \quad \vec{\mu} = I\vec{A},$$

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}, \quad \oint \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0, \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2}, \quad \oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\cdot d\vec{A},$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt}, \quad \Phi^{total} = N\phi_{espira} = LI, \quad \Phi_{21}^{total} = N_2\phi_{espira} = M_{21}I_1, \;\; u_m = \frac{B^2}{2\mu_0}, \;\; U = \frac{LI^2}{2},$$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0\epsilon_0\frac{d}{dt}\int \vec{E}\cdot d\vec{A}, \quad I = \int \vec{J}\cdot d\vec{A}, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}, \quad \nabla^2\vec{E} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}, \quad \nabla^2\vec{B} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}, \quad E = cB,$$

$$\vec{E} = E_m\cos(kx \pm \omega t + \phi)\,\hat{\jmath}, \quad \vec{B} = B_m\cos(kx \pm \omega t + \phi)\,\hat{k}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad k\,c = \omega,$$

$$f = 1/T, \quad \vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}, \quad S = uc, \quad u = u_e + u_m = \frac{\epsilon_0\,E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad I = < S > = \frac{E_m\,B_m}{2\mu_0},$$

$$< \cos^2(kx - \omega t + \phi) > = < \operatorname{sen}^2(kx - \omega t + \phi) > = 1/2, \quad < \cos(kx - \omega t + \phi)\operatorname{sen}(kx - \omega t + \phi) > = 0.$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right), \quad \cos A - \cos B = 2\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right).$$

$$\sin A + \sin B = 2\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}), \quad \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sqrt{x^2+a^2}.$$

$$\int \frac{dx}{(c+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{c\,(c+x^2)^{1/2}},$$