Física III - 4323203

Escola Politécnica - 2023

GABARITO DA P1

18 de maio de 2023

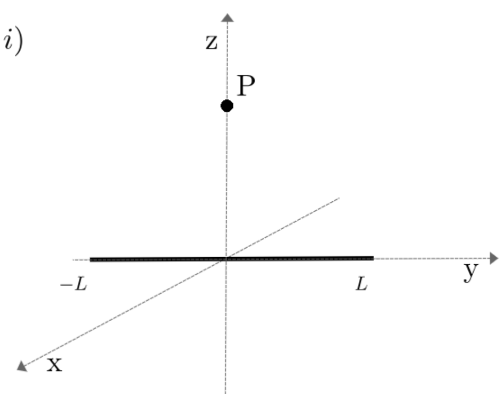
Questão 1

Considere uma barra de comprimento $2L$ e seção transversal desprezível, centrada na origem do sistema de coordenadas e paralela ao eixo **y** (veja figura abaixo à esquerda). Suponha que esta barra está carregada de acordo com a seguinte densidade linear de cargas:

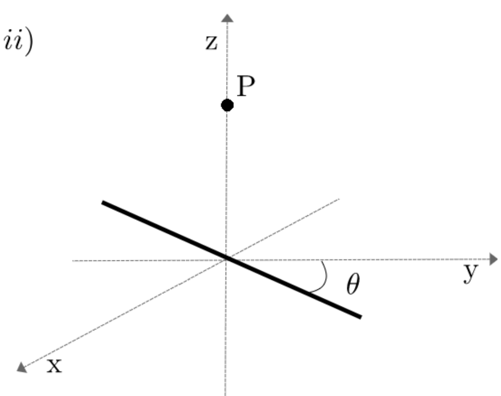
$$\lambda(y) = \beta|y| = \begin{cases} -\beta y & \text{se } -L \leq y < 0, \\ \beta y & \text{se } 0 \leq y \leq L, \end{cases} \tag{1}$$

sendo β uma constante positiva.

i)



ii)



(a) (1,0 ponto) Determine o potencial eletrostático V em um ponto $P = (0, 0, z)$, que está situado no eixo **z**, a uma distância z da origem. (Considere potencial eletrostático nulo no infinito).

(b) (1,0 ponto) Calcule o <u>vetor</u> campo elétrico $\vec{E}$ no ponto P.

(c) (0,5 ponto) Se colocarmos uma carga pontual $+Q$ no ponto P, qual é a força eletrostática exercida sobre esta carga? Se rotacionarmos a barra em torno do eixo $\mathbf{z}$, de modo que esta faça um ângulo θ com o eixo $\mathbf{y}$, dentro do plano xy (ver Fig. *ii*), é possível anular a força eletrostática que atua na carga $+Q$? Justifique sua resposta.

Solução da questão 1

(a) $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{-L}^{+L} \frac{\beta|y|dy}{\sqrt{y^2+z^2}} = \frac{2}{4\pi\epsilon_0}\int_{0}^{+L} \frac{\beta y dy}{\sqrt{y^2+z^2}} \Rightarrow$

$\boxed{V = \frac{\beta}{2\pi\epsilon_0}\left[\sqrt{L^2+z^2} - z\right]}$

(b) Por simetria, o vetor campo elétrico só apresenta uma componente na direção $\hat{k}$. Logo:

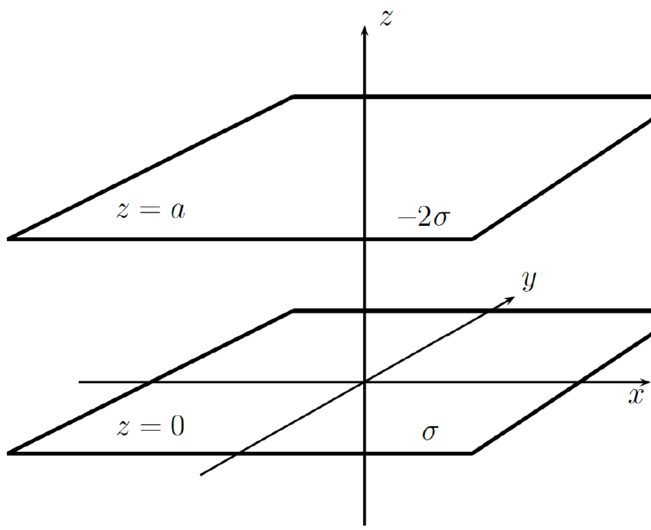
$$\vec{E} = -\frac{dV}{dz}\hat{k} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\beta}{2\pi\epsilon_0}\left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+L^2}}\right]\hat{k}}$$

(c) $\vec{F} = Q\vec{E} \Rightarrow \boxed{\vec{F} = Q\frac{\beta}{2\pi\epsilon_0}\left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+L^2}}\right]\hat{k}}$

Como o campo elétrico produzido pela barra só apresenta componente na direção $\hat{k}$, o campo elétrico não é alterado quando a barra é rotacionada de um ângulo θ. Portanto, não é possível alterar a força que atua na carga localizada no ponto P deste modo.

Questão 2

Considere um sistema formado por duas placas condutoras infinitas situadas nos planos $z = 0$ e $z = a$, e com densidades superficiais de carga σ e -2σ, respectivamente, conforme a figura abaixo.



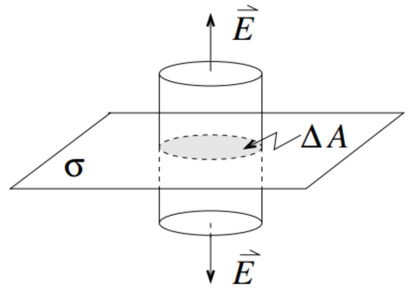
(a) (0,5 ponto) Calcule o vetor campo elétrico em todo o espaço devido apenas à placa situada no plano $z = 0$.

(b) (1,0 ponto) Calcule o vetor campo elétrico na região $0 < z < a$ devido às duas placas.

(c) (1,0 ponto) Calcule o trabalho realizado por uma força externa para mover um carga pontual positiva +Q da posição $z = a$ para $z = 0$. Obs.: Considere que a carga possua velocidade nula em $z = a$ e $z = 0$.

Solução da questão 2

(a) Por simetria, o campo elétrico produzido pela placa localizada no plano $z = 0$ aponta na direção $\hat{k}$ para $z > 0$ e $-\hat{k}$ se $z < 0$.



Para obter o campo elétrico, vamos Utilizar a lei de Gauss, com a superfície gaussiana mostrada na figura acima. Levando em conta que o fluxo do campo elétrico será zero na superfície lateral do cilindro, obtemos:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \tfrac{q_{int}}{\epsilon_0} \Rightarrow 2E\Delta A = \frac{\sigma \Delta A}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Portanto:

$$\boxed{\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{k} & \text{p/ } z > 0, \\ -\dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{k} & \text{p/ } z < 0, \end{cases}}$$

(b) Primeiramente, vamos calcular o campo elétrico devido apenas à placa localizada em $z = a$. Utilizando o mesmo procedimento do item (a), mas considerando uma superficíe gaussiana em formato cilíndrico, com o centro em $z = a$, obtemos:

$$\vec{E} = \begin{cases} -\dfrac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{k} & \text{p/ } z > a, \\ +\dfrac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{k} & \text{p/ } z < a, \end{cases}$$

Fazendo a superposição dos campos elétricos devido às duas placas na região $0 < z < a$,encontramos:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{3\sigma}{2\epsilon_0}\hat{k}}$$

(c) A diferença de potencial entre as duas placas é:

$$\Delta V = V_a - V_0 = -\int_0^a \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\int_0^a \frac{3\sigma}{2\epsilon_0} dz = -\frac{3\sigma a}{2\epsilon_0}$$

A partir da diferença de potencial, o trabalho W realizado pela força externa é:

$$W = -Q\Delta V \Rightarrow \boxed{W = \frac{3Q\sigma a}{2\epsilon_0}}$$

<u>solução alternativa:</u>

A força exercida pelo campo elétrico numa carga +Q, localizada entre as duas placas, é:

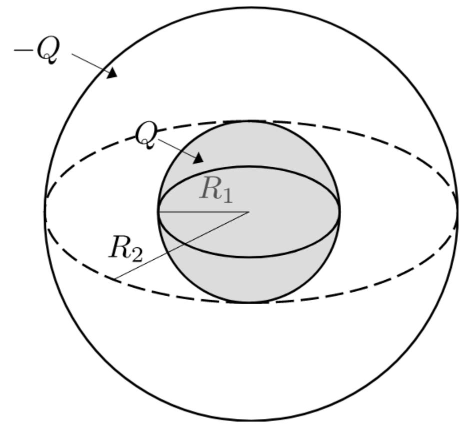
$$\vec{F} = Q\vec{E} = \frac{3Q\sigma}{2\epsilon_0}\hat{k}$$

Ao mover a carga pontual $+Q$ de $z = a$ para $z = 0$, a força externa deve ser capaz de contrabalancear a força exercida pelo campo elétrico, de modo que $\vec{F}_{ext} = -\vec{F}$. Logo, o trabalho realizado pela força externa é:

$$W = \int \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{\ell} \Rightarrow \boxed{W = \frac{3Q\sigma a}{2\epsilon_0}}$$

Questão 3

Um capacitor é formado por uma esfera condutora de raio R_1 e uma casca esférica condutora de raio R_2, sendo $R_2 > R_1$. Considerando que a esfera condutora é carregada com uma carga $+Q$ e a casca esférica é carregada com carga $-Q$ (veja figura abaixo), determine:



(a) (1,0 ponto) O vetor campo elétrico nas regiões $r < R_1$, $R_1 < r < R_2$ e $r > R_2$.

(b) (0,5 ponto) A diferença de potencial $\Delta V = V_+ - V_-$ entre a esfera interna e a casca externa.

(c) (0,5 ponto) A capacitância do capacitor.

(d) (0,5 ponto) A energia armazenada no capacitor.

Solução da questão 3

(a) $\underline{r < R_1}$

Na situação de equilíbrio eletrostático, o campo elétrico é zero. Portanto:

$$\boxed{\vec{E} = 0 \quad \text{se } r < R_1}$$

$\underline{R_1 < r < R_2}$

Devido à simetria do problema, podemos utilizar a lei de Gauss uma superfície gaussiana com formato esférico de raio r, sendo $R_1 < r < R_2$.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \tfrac{q_{int}}{\epsilon_0} \Rightarrow E 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Portanto:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r} \quad \text{se } R_1 < r < R_2}$$

$\underline{r > R_2}$

Aplicando a lei de Gauss na região $r > R_2$, com uma superfície gaussiana esférica de raio $r > R_2$, encontramos $q_{int} = 0$. Portanto:

$$\boxed{\vec{E} = 0 \quad \text{se } r > R_2}$$

(b) $$\Delta V = V_+ - V_- = -\int_-^+ \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r} \cdot \hat{r} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \Rightarrow$$

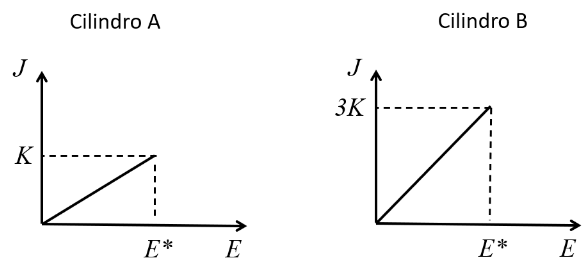
$$\boxed{\Delta V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}$$

(c) $$C = \frac{Q}{\Delta V} \Rightarrow \boxed{C = \frac{4\pi\epsilon_0}{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)} = 4\pi\epsilon_0\left(\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}\right)}$$

(d) $$U = \frac{Q^2}{2C} \Rightarrow \boxed{U = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}\right)}$$

Questão 4

(I) (1,5 ponto) A figura abaixo mostra o comportamento da densidade de corrente como função da intensidade do campo elétrico no interior de dois fios cilíndricos metálicos A e B. Os dois fios possuem comprimento total L e raios r_A e r_B, respectivamente, sendo K uma constante positiva. Se os dois condutores são percorridos pela mesma corrente I ao longo de suas direções axiais, qual a razão r_A/r_B para que o campo elétrico E no interior dos fios também seja o mesmo?



(II) (1,0 ponto) Um fio cilíndrico é constituído de duas partes. Uma das partes, cujo comprimento é $L/3$, possui raio r_1 e é constituída de um material metálico de condutividade σ_1. A outra parte, de comprimento $2L/3$, possui raio r_2 e é constituída de um material metálico de condutividade σ_2. Considerando que as duas partes são conectadas em série e que a corrente elétrica percorre o fio cilíndrico na direção axial, calcule a resistência total do fio.

$\boxed{\textbf{Solução da questão 4}}$

(I) $J_A = \sigma_A E_A \Rightarrow K = \sigma_A E^*$

$J_B = \sigma_B E_B \Rightarrow 3K = \sigma_B E^*$

A partir das duas equações acima, encontramos $\sigma_A/\sigma_B = 1/3$.

Se a corrente nos dois condutores é a mesma, podemos escrever:

$J_A = I/\pi r_A^2 \Rightarrow \sigma_A E = I/\pi r_A^2$

$J_B = I/\pi r_B^2 \Rightarrow \sigma_B E = I/\pi r_B^2$

Combinando as duas equações acima, encontramos: $\dfrac{\sigma_A}{\sigma_B} = \dfrac{1}{3} = \dfrac{r_B^2}{r_A^2} \Rightarrow \boxed{\dfrac{r_A}{r_B} = \sqrt{3}}$

(II) $R = R_1 + R_2 = \dfrac{1}{\sigma_1}\dfrac{L}{3\pi r_1^2} + \dfrac{1}{\sigma_2}\dfrac{2L}{3\pi r_2^2} \Rightarrow \boxed{R = \dfrac{L}{3\pi}\left[\dfrac{1}{\sigma_1 r_1^2} + \dfrac{2}{\sigma_2 r_2^2}\right]}$

Formulário

$$\vec{F} = \frac{qq'(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3}, \qquad \vec{F} = q\vec{E}, \quad \vec{E} = \frac{q(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3}, \qquad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{(\vec{r}-\vec{r}')dq}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3},$$

$$p = qd, \quad \vec{\tau} = \vec{p}\times\vec{E}, \quad U = -\vec{p}\cdot\vec{E}, \quad \Phi_E = \int \vec{E}\cdot d\vec{A}, \quad \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0},$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|}, \quad V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{\ell}, \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V,$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}, \quad U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i<j}\frac{q_i\,q_j}{r_{ij}}, \quad C = Q/V, \quad C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots,$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots, \quad U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} = \frac{QV}{2}, \quad u = \frac{\epsilon_0}{2}E^2,$$

$$dR = \rho\frac{d\ell}{A}, \quad R = \int dR, \quad V = RI, \quad \vec{J} = \sigma\vec{E} = \frac{1}{\rho}\vec{E},$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sqrt{x^2+a^2}$$