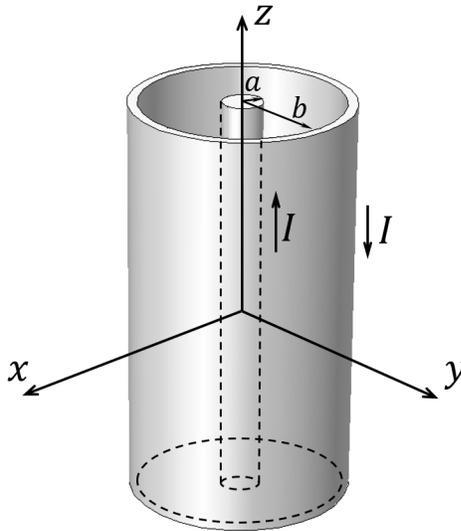


Física III - 4323203
Escola Politécnica - 2023
GABARITO DA P2
6 de julho de 2023

Questão 1

Um longo cabo coaxial é formado por um condutor central, de raio a , e por uma casca condutora externa, de raio b , e espessura desprezível, sendo $a < b$. No condutor interno flui uma corrente I , que está uniformemente distribuída ao longo de sua seção transversal. Já na parte externa, flui uma corrente I , de mesma magnitude, porém em sentido contrário à corrente do condutor central, como mostra a figura abaixo.



- (a) (1,0 ponto) Calcule o vetor campo magnético na região $0 < r < a$, onde r é a coordenada radial.
- (b) (0,5 ponto) Calcule o vetor campo magnético na região $a < r < b$.
- (c) (0,5 ponto) Calcule o vetor campo magnético na região $r > b$.
- (d) (0,5 ponto) Calcule a energia magnética em um dado comprimento L do cabo.

Solução da questão 1

- (a) Considerando uma curva fechada circular de raio $r < a$ e utilizando a lei de Ampère, temos:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{int} \Rightarrow B 2\pi r = \mu_0 \frac{I \pi r^2}{\pi a^2} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \hat{\theta}}$$

- (b) Considerando uma curva fechada circular de raio r com $a < r < b$ e utilizando a lei de Ampère, temos:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{int} \Rightarrow B 2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\theta}}$$

- (c) Considerando uma curva fechada circular de raio $r > b$ e utilizando a lei de Ampère, temos:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{int} \Rightarrow B 2\pi r = \mu_0 (I - I) \Rightarrow \boxed{\vec{B} = 0}$$

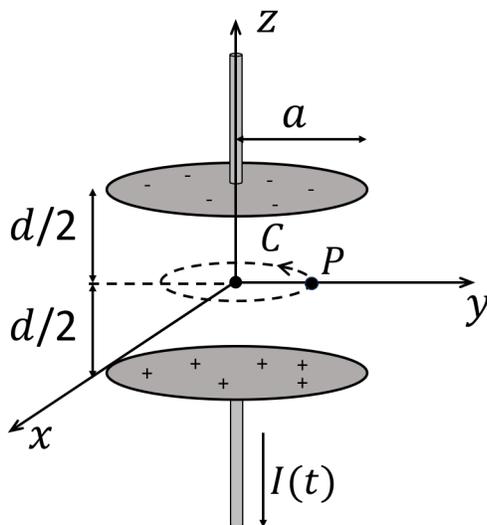
$$(d) U = \int u_B dV = \int \frac{B^2}{2\mu_0} dV = \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{1}{2\mu_0} \left[\frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \right]^2 r dr d\theta dz + \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_a^b \frac{1}{2\mu_0} \left[\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \right]^2 r dr d\theta dz \Rightarrow$$

$$U = \frac{\mu_0 I^2 L}{16\pi} + \frac{\mu_0 I^2 L}{4\pi} \ln \frac{b}{a} \Rightarrow \boxed{U = \frac{\mu_0 I^2 L}{4\pi} \left[\frac{1}{4} + \ln \frac{b}{a} \right]}$$

Questão 2

Durante a descarga de um capacitor de placas paralelas, o vetor campo elétrico em seu interior é $\vec{E}(t) = E_0 e^{-\beta t} \hat{k}$, sendo E_0 e β constantes positivas. As placas do capacitor possuem raio a e estão separadas por uma distância d , conforme ilustrado na figura abaixo. A figura também mostra um caminho circular orientado C , de raio $b < a$, concêntrico ao eixo central.

[Dado: Desprezando efeitos de borda, o módulo do campo elétrico $E(t)$ no interior do capacitor é $E(t) = Q(t)/(\epsilon_0 A)$, onde $Q(t)$ é a carga elétrica em uma das placas no instante t e A é a área de cada placa].



- (a) (0,5 ponto) Calcule $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$ ao longo do caminho C .
- (b) (1,0 ponto) Calcule $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$ ao longo do caminho C .
- (c) (0,5 ponto) Calcule o vetor campo magnético no ponto $P = (0, b, 0)$, expressando-o em coordenadas cartesianas.
- (d) (0,5 ponto) Calcule o módulo da corrente $I(t)$ no fio.

Solução da questão 2

(a) O vetor campo elétrico é perpendicular à curva C , logo:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

(b) Utilizando a Lei de Ampère-Maxwell, temos:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int \vec{E} \cdot d\vec{A} \Rightarrow \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = -\pi b^2 \mu_0 \epsilon_0 E_0 \beta e^{-\beta t}$$

$$(c) \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int \vec{E} \cdot d\vec{A} \Rightarrow B 2\pi b = -\pi b^2 \mu_0 \epsilon_0 E_0 \beta e^{-\beta t} \Rightarrow \vec{B} = \frac{b \mu_0 \epsilon_0 E_0 \beta e^{-\beta t}}{2} \hat{i}$$

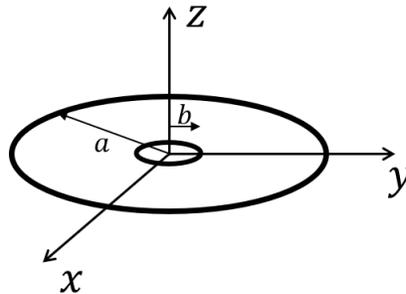
(d) A carga $Q(t)$ no capacitor é dada por:

$$Q(t) = E \epsilon_0 \pi a^2 = E_0 e^{-\beta t} \epsilon_0 \pi a^2. \text{ Logo:}$$

$$|I| = \left| \frac{dQ}{dt} \right| \Rightarrow |I(t)| = E_0 \beta e^{-\beta t} \epsilon_0 \pi a^2 = E_0 \beta e^{-\beta t} \epsilon_0 A$$

Questão 3

Uma espira circular de raio a está localizada no plano xy , com seu centro na origem do sistema de coordenadas. Uma outra espira circular possui raio $b \ll a$ e também está localizada no plano xy , conforme ilustrado na figura abaixo.



- (a) (1,0 ponto) Considerando que uma corrente I_1 circula na espira maior, calcule o módulo do campo magnético na origem do sistema de coordenadas. Supondo que o campo magnético é uniforme em torno deste ponto, calcule o valor aproximado do fluxo magnético Φ_2 através da espira menor devido à corrente que passa pela espira maior.
- (b) (0,5 ponto) Calcule a indutância mútua entre as duas espiras.
- (c) (0,5 ponto) Suponha agora que uma corrente I_2 esteja circulando na espira menor. Calcule o fluxo magnético Φ_1 na espira maior devido apenas à corrente I_2 .
- (d) (0,5 ponto) Se a corrente na espira menor for $I_2(t) = \beta t$, sendo β uma constante, calcule o módulo da força eletromotriz induzida na espira maior.

Solução da questão 3

- (a) O campo magnético infinitesimal $d\vec{B}$ pelo elemento infinitesimal de corrente $d\vec{\ell}$ é dado por:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \frac{ad\theta}{a^2}.$$

Logo:

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{ad\theta}{a^2} \Rightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0 I_1}{2a}}$$

$$\Phi_2 = B\pi b^2 \Rightarrow \boxed{\Phi_2 = \frac{\mu_0 I_1}{2a} \pi b^2}$$

(b) $\Phi_2 = MI_1 \Rightarrow M = \frac{\Phi_2}{I_1} = \frac{\mu_0}{2a} \pi b^2 \Rightarrow \boxed{M = \frac{\mu_0}{2a} \pi b^2}$

- (c) Usando a definição de indutância mútua:

$$\Phi_2 = MI_1, \quad \Phi_1 = MI_2$$

teremos:

$$\Phi_1 = MI_2 \Rightarrow \boxed{\Phi_1 = I_2 \frac{\mu_0}{2a} \pi b^2}$$

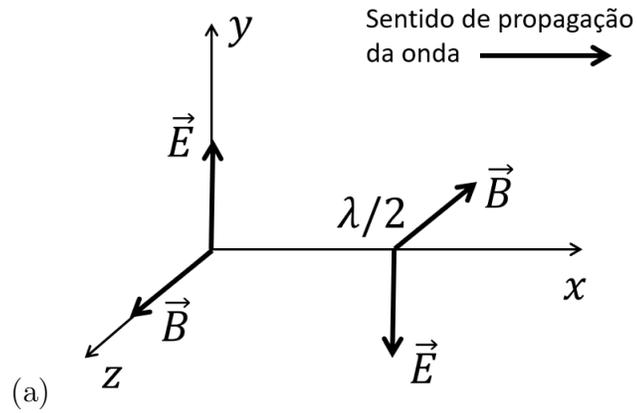
(d) $\varepsilon = -\frac{d\Phi_1}{dt} \Rightarrow \boxed{|\varepsilon| = \beta \frac{\mu_0}{2a} \pi b^2}$

Questão 4

Considere uma onda eletromagnética plana que se propaga no vácuo com campo elétrico dado por $\vec{E} = E_0 \cos[kx - \omega t] \hat{j}$, onde $E_0 > 0$ é a amplitude da onda, k é o número de onda, e ω é a frequência angular.

- (a) (0,5 ponto) Faça um esboço do vetor campo elétrico e do vetor campo magnético nas posições $x = 0$ e $x = \lambda/2$, no instante de tempo $t = 0$, onde λ é o comprimento de onda. Indique no esboço, o sentido de propagação da onda.
- (b) (1,0 ponto) Determine o vetor campo magnético desta onda. Expresse sua resposta em termos de E_0 , c , e demais informações contidas no enunciado.
- (c) (1,0 ponto) Calcule o vetor de Poynting \vec{S} e o seu valor médio $\langle \vec{S} \rangle$.

Solução da questão 4



(b) Temos $\vec{B} = \hat{c} \times \vec{E}/c$ e $\hat{c} = \hat{i}$, logo $\vec{B} = \frac{E_0}{c} \cos[kx - \omega t] \hat{k}$

(c) $\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \Rightarrow \vec{S} = \frac{E_0^2}{c\mu_0} \cos^2[kx - \omega t] \hat{i}$.

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{E_0^2}{2c\mu_0} \hat{i}$$

Formulário

$$\begin{aligned}
 d\vec{F} &= I d\vec{\ell} \times \vec{B}, & d\vec{B} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2}, & \Phi^{total} &= LI, & \Phi_{21}^{total} &= M_{21} I_1 = M I_1, & u_m &= \frac{B^2}{2\mu_0}, & U &= \frac{LI^2}{2}, \\
 u_e &= \frac{\epsilon_0 E^2}{2}, & \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} &= \frac{q_{int}}{\epsilon_0}, & \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} &= 0, & \mathcal{E} &= \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = -\frac{d\Phi_m}{dt}, \\
 \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} &= \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int \vec{E} \cdot d\vec{A}, & I &= \int \vec{J} \cdot d\vec{A}, & \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, & \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\
 \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, & \nabla^2 \vec{E} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, & \nabla^2 \vec{B} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}, & c &= \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}, & E &= cB, \\
 \vec{E} &= E_m \cos(kx \pm \omega t + \phi) \hat{j}, & \vec{B} &= B_m \cos(kx \pm \omega t + \phi) \hat{k}, & k &= \frac{2\pi}{\lambda}, & \omega &= \frac{2\pi}{T}, & kc &= \omega, \\
 f &= 1/T, & \vec{S} &= \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}, & S &= uc, & u &= u_e + u_m = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}, & I &= \langle S \rangle = \frac{E_m B_m}{2\mu_0}, \\
 \langle \cos^2(kx - \omega t + \phi) \rangle &= \langle \sin^2(kx - \omega t + \phi) \rangle = 1/2, & \langle \cos(kx - \omega t + \phi) \sin(kx - \omega t + \phi) \rangle &= 0, \\
 \cos A + \cos B &= 2 \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right), & \cos A - \cos B &= 2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \sin\left(\frac{A-B}{2}\right). \\
 \sin A + \sin B &= 2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right), & dV_c &= r dr d\theta dz, & dV_e &= r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi \\
 \hat{r} &= r \cos\theta \hat{i} + r \sin\theta \hat{j}, & \hat{\theta} &= -r \sin\theta \hat{i} + r \cos\theta \hat{j},
 \end{aligned}$$

Dado um campo vetorial $\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$, o rotacional do campo é dado por:

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$