Física III - 4323203

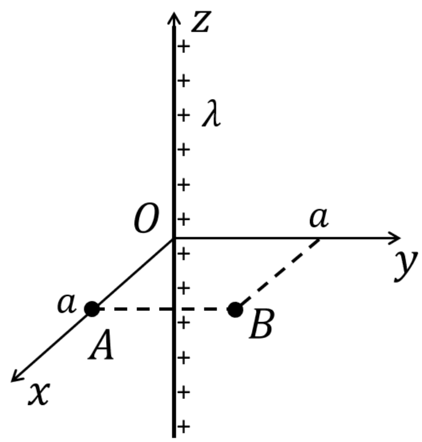
Escola Politécnica - 2023

GABARITO DA REC

20 de julho de 2023

Questão 1

Um fio infinito, alinhado com o eixo z, está carregado com uma densidade linear de carga $\lambda > 0$, conforme ilustrado na figura abaixo.



(a) (1,0 ponto) Calcule o vetor campo elétrico nos pontos $A = (a, 0, 0)$ e $B = (a, a, 0)$. Expresse sua resposta na forma cartesiana.

(b) (1,0 ponto) Calcule a diferença de potencial elétrico $\Delta V = V_B - V_A$ entre os pontos $B = (a, a, 0)$ e $A = (a, 0, 0)$.

(c) (0,5 ponto) Calcule o trabalho realizado por uma força externa ao mover uma carga puntiforme positiva $+q$, do ponto A para o ponto B. Obs.: Considere que a carga possui velocidade nula no ponto A e no ponto B.

Solução da questão 1

(a) O campo elétrico a uma distância r do fio pode ser obtido a partir da lei de Gauss com uma superfície gaussiana em formato cilíndrico de altura h e raio r:

$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \dfrac{q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(2\pi r h) = \dfrac{\lambda h}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{r}$

<u>Campo elétrico no ponto A</u>

A partir do resultado acima, temos, para o ponto A:

$\boxed{\vec{E}_A = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}\hat{i}}$

<u>Campo elétrico no ponto B</u>

No ponto B, a distância r é dada por $r = \sqrt{a^2+a^2} = a\sqrt{2}$ e o vetor unitário $\hat{r}$ pode ser escrito como $\hat{r} = (\hat{i}+\hat{j})/\sqrt{2}$. Logo:

$\boxed{\vec{E}_B = \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\hat{i}+\hat{j})}$

(b) $\Delta V = V_B - V_A = -\int\limits_A^B \vec{E}\cdot d\vec{\ell} \Rightarrow \Delta V = -\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int\limits_{r_A}^{r_B}\dfrac{1}{r}dr \Rightarrow \Delta V = -\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln(r_B) - \ln(r_A)\right]$,

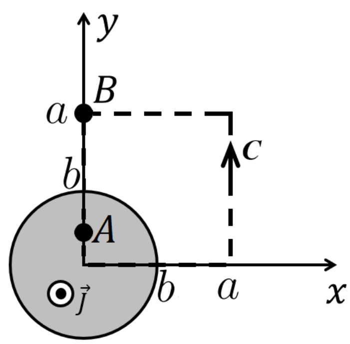
sendo $r_B = a\sqrt{2}$ e $r_a = a$. Portanto:

$\boxed{\Delta V = -\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln(\sqrt{2})}$

(c) $W = q\Delta V \Rightarrow \boxed{W = -\dfrac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln(\sqrt{2})}$

Questão 2

Em um fio condutor infinito de raio b, alinhado com o eixo z, há uma densidade de corrente dada por $\vec{J} = J_0\hat{k}$, sendo $J_0 > 0$, como mostrado na figura abaixo. A figura também mostra um caminho fechado quadrado C, de lado $a > b$, com a orientação mostrada na figura.



(a) (1,0 ponto) Calcule o <u>vetor</u> campo magnético no ponto $A = (0, b/2, 0)$. Expresse sua sua resposta na forma cartesiana.

(b) (1,0 ponto) Calcule o <u>vetor</u> campo magnético no ponto $B = (0, a, 0)$. Expresse sua sua resposta na forma cartesiana.

(c) (0,5 ponto) Calcule $\int_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$ ao longo do caminho fechado C.

Solução da questão 2

(a) Utilizando a lei de Ampère, temos:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{int} \Rightarrow B(2\pi\frac{b}{2}) = \mu_0(J_0\frac{\pi b^2}{4}) \Rightarrow \boxed{\vec{B}_A = -\frac{\mu_0 J_0 b}{4}\hat{i}}$$

(b) Utilizando a lei de Ampère, temos:

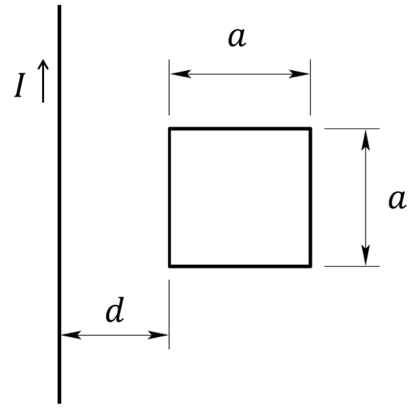
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{int} \Rightarrow B(2\pi a) = \mu_0(J_0\pi b^2) \Rightarrow \boxed{\vec{B}_B = -\frac{\mu_0 J_0 b^2}{2a}\hat{i}}$$

(c) Utilizando a lei de Ampère, temos:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{int} \Rightarrow \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0(J_0\frac{\pi b^2}{4}) \Rightarrow \boxed{\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 J_0\frac{\pi b^2}{4}}$$

Questão 3

Uma espira quadrada condutora de lado a e resistência R está orientada paralelamente a um fio condutor infinito e separada por uma distância d do fio (veja figura abaixo).



(a) (0,5 ponto) Calcule o módulo do campo magnético produzido pelo fio infinito a uma distância r do fio.

(b) (0,5 ponto) Calcule o fluxo magnético produzido pelo fio sobre a espira quadrada de raio a.

(c) (0,5 ponto) Calcule a indutância mútua do sistema.

(d) (1,0 pontos) Se o fio infinito é percorrido de baixo para cima por uma corrente $I = At$, onde t é o tempo e A é uma constante positiva, calcule a corrente induzida na espira quadrada. Determine e explique o sentido da corrente induzida.

Solução da questão 3

(a) Utilizando a lei de Ampère, temos:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{int} \Rightarrow B(2\pi r) = \mu_0 I \Rightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}}$$

(b) $\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} \Rightarrow \Phi_B = \int\limits_{d}^{d+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi r}(adr) \Rightarrow \boxed{\Phi_B = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right)}$

(c) A indutância mútua é:

$$M = \frac{\Phi_B}{I} \Rightarrow \boxed{M = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right)}$$

(d) A força eletromotriz na espira é dada por:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \Rightarrow \mathcal{E} = -\frac{\mu_0 a A}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right)$$

Portanto, o módulo da corrente induzida é:

$$I_{ind} = \frac{|\mathcal{E}|}{R} \Rightarrow \boxed{I_{ind} = \frac{\mu_0 a A}{2\pi R} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right)}$$

Como foi escolhido um vetor área apontado para dentro da página, e a força eletromotriz é negativa, a corrente flui no sentido <u>anti-horário</u>.

Questão 4

O campo elétrico de uma onda eletromagnética plana se propagando no vácuo é dado por $\vec{E} = \left[15\sqrt{3}\hat{\jmath} + 15\hat{k}\right] \cos\left(2\pi \times 10^8 t - \frac{2\pi}{3} x\right)$,
onde o campo elétrico está em V/m, o tempo t em segundos, e x em metros. Considere que a velocidade da luz no vácuo é $c = 3 \times 10^8$ m/s.

(a) (1,0 ponto) Calcule a frequência e o comprimento de onda.

(b) (0,5 ponto) Determine a direção e sentido de propagação da onda.

(c) (1,0 ponto) O vetor campo magnético desta onda.

Solução da questão 4

(a) Uma onda eletromagnética plana se propagando no sentido de x positivo pode ser descrita por:

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx),$$

sendo $\omega = 2\pi f$ a frequência angular e $k = 2\pi/\lambda$ o número de onda, onde f é a frequência e λ é o comprimento de onda. Comparando a expressão acima com a expressão do enunciado, encontramos:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \times 10^8 \Rightarrow \boxed{f = 1 \times 10^8 \text{ Hz}}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \boxed{\lambda = 3 \text{ m}}$$

(b) $\boxed{\text{A onda se move na direção x no sentido de x positivo}}$

(c) O campo magnético desta onda é dada por:

$$\vec{B} = \frac{\hat{c} \times \vec{E}}{c} \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \left[\frac{15\sqrt{3}\hat{k} - 15\hat{j}}{c}\right] \cos\left(2\pi \times 10^8 t - \frac{2\pi}{3}x\right)},$$

Formulário

$$\vec{F}=\frac{qq'(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3},\qquad \vec{F}=q\vec{E},\quad \vec{E}=\frac{q(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3},\qquad \vec{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{r^2}\hat{r},\qquad V=\frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|},$$

$$V=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{r},\quad \vec{E}=-\vec{\nabla}V,\quad U=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i<j}\frac{q_i\,q_j}{r_{ij}},\quad dA=2\pi r dr(\text{coordenadas}\quad\text{polares})$$

$$C=Q/V,\quad W=q\Delta V,\quad V_B-V_A=-\int_A^B\vec{E}\cdot d\vec{\ell},\quad \vec{E}=-\vec{\nabla}V,\quad d\vec{F}=Id\vec{\ell}\times\vec{B},\quad \vec{\mu}=I\vec{A},$$

$$\oint\vec{E}\cdot d\vec{A}=\frac{q_{int}}{\epsilon_0},\quad \oint\vec{B}\cdot d\vec{A}=0,\quad d\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2},\quad \oint\vec{E}\cdot d\vec{\ell}=-\frac{d}{dt}\int\vec{B}\cdot d\vec{A},$$

$$\mathcal{E}=-\frac{d\Phi_m}{dt},\quad \Phi^{total}=N\phi_{espira}=LI,\quad \Phi_{21}^{total}=N_2\phi_{espira}=M_{21}I_1,\quad u_m=\frac{B^2}{2\mu_0},\quad U=\frac{LI^2}{2},$$

$$\oint\vec{B}\cdot d\vec{\ell}=\mu_0 I+\mu_0\epsilon_0\frac{d}{dt}\int\vec{E}\cdot d\vec{A},\quad I=\int\vec{J}\cdot d\vec{A},\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\epsilon_0},\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0,\quad \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t},\quad \nabla^2\vec{E}=\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2},\quad \nabla^2\vec{B}=\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2},\quad c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}},\quad \vec{B}=\frac{\hat{c}\times\vec{E}}{c},$$

$$\vec{E}=E_m\cos(kx\pm\omega t+\phi)\,\hat{\jmath},\quad \vec{B}=B_m\cos(kx\pm\omega t+\phi)\,\hat{k},\quad k=\frac{2\pi}{\lambda},\quad \omega=\frac{2\pi}{T},\quad k\,c=\omega,$$

$$f=1/T,\quad \vec{S}=\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B},\quad S=uc,\quad u=u_e+u_m=\frac{\epsilon_0\,E^2}{2}+\frac{B^2}{2\mu_0},\quad I=<S>=\frac{E_m\,B_m}{2\mu_0},$$

$$<\cos^2(kx-\omega t+\phi)>=<\operatorname{sen}^2(kx-\omega t+\phi)>=1/2,\quad <\cos(kx-\omega t+\phi)\operatorname{sen}(kx-\omega t+\phi)>=0.$$

$$\cos A+\cos B=2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right),\quad \cos A-\cos B=2\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right).$$

$$\sin A+\sin B=2\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right),\quad \hat{r}=\cos\theta\hat{\imath}+\operatorname{sen}\theta\hat{\jmath},\quad \hat{\theta}=-\operatorname{sen}\theta\hat{\imath}+\cos\theta\hat{\jmath}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}),\quad \int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\sqrt{x^2+a^2}.$$

$$\int\frac{dx}{(c+x^2)^{3/2}}=\frac{x}{c\,(c+x^2)^{1/2}},$$