Física III - 4323203

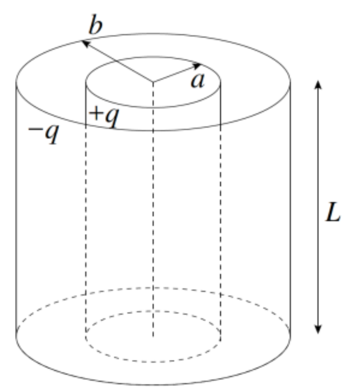
Escola Politécnica - 2023

GABARITO DA SUB

13 de julho de 2023

Questão 1

Um capacitor cilíndrico, de comprimento L, é formado por um cilíndro condutor de raio a e por uma casca cilíndrica condutora de raio $b > a$, conforme ilustrado na figura abaixo. Desprezando efeitos de borda e considerando que o cilindro interno está carregado com carga $+q$, e a casca esférica externa está carrega com carga $-q$, calcule:



(a) (1,0 ponto) O vetor campo elétrico nas regiões $r < a$, $a < r < b$ e $r > b$, sendo r a coordenada radial.

(b) (0,5 ponto) A diferença de potencial eletrostático entre o cilíndro interno e a casca condutora externa.

(c) (0,5 ponto) A capacitância do capacitor.

(d) (0,5 ponto) A energia armazenada no capacitor.

Solução da questão 1

(a) região $r < a$

Para campos eletrostáticos, o campo elétrico no interior do condutor é zero. Portanto:

$\boxed{\vec{E} = 0}$

região $a < r < b$

Utilizando a lei de Gauss, temos:

$\oint \vec{E} \cdot \hat{n} dA = q_{int}/\varepsilon_0 \Rightarrow 2\pi r L E = \dfrac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 L r}\hat{r}}$

região $r > b$

Utilizando a lei de Gauss com uma superfície gaussiana cilíndrica de raio $r > b$ e altura L, temos

$\oint \vec{E} \cdot \hat{n} dA = q_{int}/\varepsilon_0$

Como nesta situação, a carga $q_{int} = +q - q = 0$, obtemos:

$\boxed{\vec{E} = 0}$

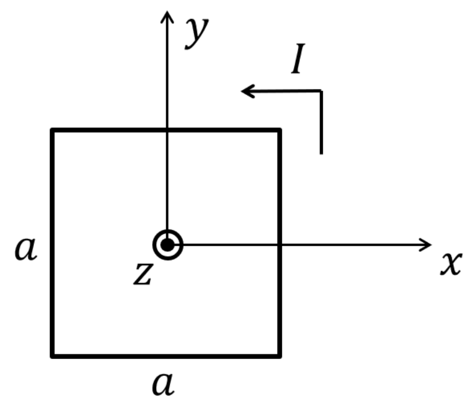
(b) $\Delta V = -(V_b - V_a) = \int\limits_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \Rightarrow \Delta V = \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 L} \int\limits_a^b \dfrac{dr}{r} \Rightarrow \boxed{\Delta V = \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 L} \ln(b/a)}$

(c) $C = \dfrac{q}{\Delta V} \Rightarrow \boxed{C = \dfrac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln(b/a)}}$

(d) $U = \dfrac{q^2}{2C} = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 L} \ln(b/a) \Rightarrow \boxed{U = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 L} \ln(b/a)}$

Questão 2

Considere uma espira quadrada de lado a que está situada no plano xy e que transporta uma corrente I no sentido anti-horário, como mostra a figura abaixo.



(a) (1,5 ponto) Qual é o campo magnético $\vec{B}$ no centro desse quadrado?

(b) (1,0 ponto) Considere agora que esse circuito esteja na presença de um campo magnético uniforme que faz um ângulo θ com o vetor área desse circuito, $\vec{B} = \text{sen}\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{k}$. Quais são, respectivamente, a força magnética $\vec{F}$ e o torque resultante $\vec{\tau}$ sobre esse circuito?

Solução da questão 2

(a) Por simetria, o campo produzido por cada um dos lados no centro da espira é o mesmo. Por meio da lei de Biot-Savart, podemos encontrar o campo produzido na origem por um de seus lados

$$\begin{aligned}\vec{B}_{\text{lado}}(0,0,0) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-a/2}^{a/2}\frac{(a/2)\,ds}{\left[(a/2)^2+s^2\right]^{3/2}}\hat{k},\\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{2}{a}\int_{-1}^{1}\frac{du}{[1+u^2]^{3/2}}\hat{k} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\left.\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right|_{-1}^{1}\hat{k}, = \frac{\mu_0 I}{\sqrt{2}\pi a}\hat{k}.\end{aligned}$$

Invocando o princípio da superposição, o campo no centro da espira é

$$\boxed{\vec{B}(0,0,0) = 4\vec{B}_{\text{lado}}(0,0,0) = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi a}\hat{k}}$$

(b) A força total resultante que atua em uma espira fechada em um campo magnético uniforme é nula. Portanto:

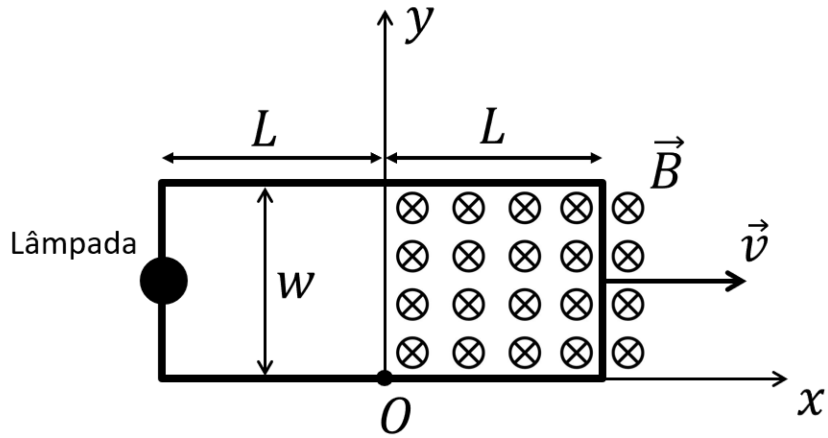
$$\boxed{\vec{F} = 0}$$

Já o torque é dado por

$$\vec{\tau} = \vec{\mu}\times\vec{B} = Ia^2\hat{k}\times\left(\text{sen}\theta\,\hat{i}+\cos\theta\,\hat{k}\right) = Ia^2\sin\theta\hat{j} \Rightarrow \boxed{\vec{\tau} = Ia^2\sin\theta\hat{j}}$$

Questão 3

Considere o seguinte circuito retangular de largura w e comprimento $2L$. No instante de tempo $t = 0$, esse circuito possui uma porção L na região $x > 0$ em que temos um campo $\vec{B} = B(-\hat{k})$ uniforme que entra no plano do circuito. Um estudante da Poli puxa esse circuito para a direita com uma velocidade constante $\vec{v} = v\hat{i}$. Ao fazer isso ele percebe que a lâmpada (de resistência R) ligada ao circuito acende-se, indicando o aparecimento de uma força eletromotriz (FEM) $\mathcal{E}$. Veja a figura abaixo.



(a) (1,0 ponto) Calcule o módulo da força eletromotriz $\mathcal{E}$ e encontre o sentido da corrente induzida no circuito.

(b) (0,5 ponto) Quando a lâmpada apaga-se?

(c) (1,0 ponto) Mostre que a potência mecânica fornecida pelo estudante para fazer o circuito se mover é igual à potência elétrica transferida para a lâmpada.

Solução da questão 3

(a) A lei de Faraday nos diz que

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt},$$

em que Φ é o fluxo magnético englobado pelo circuito. O sinal de menos determina o sentido da corrente. Ao mover o circuito para a direita aumentamos o fluxo, pois L aumenta. Dessa forma, a corrente induzida irá se opor a esse aumento, possuindo portanto sentido <u>anti-horário</u>. O fluxo magnético é $\Phi = LwB$ e assim

$$\mathcal{E} = -wB\frac{dL}{dt} = -wBv.$$

Portanto:

$\boxed{|\mathcal{E}| = wBv}$

(b) <u>Resposta qualitativa</u>

A lâmpada apaga-se quando o circuito estiver todo na região $x > 0$, pois não haverá mais variação do fluxo magnético com o tempo.

<u>Resposta quantitativa</u>

Em termos quantitativos, a lâmpada irá se apagar no instante de tempo $t = L/v$, quando a extremidade esquerda do circuito passar pela posição $x = 0$.

(c) A potência consumida pela lâmpada é $P_{\text{lamp}} = \mathcal{E}I = \mathcal{E}^2/R$. Na presença de um campo $\vec{B}$, cada elemento de circuito $d\vec{l}$ sente uma força resultante infinitesimal $d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}$. Dessa forma, as contribuições das bordas de cima, baixo anulam-se, pois $d\vec{l}$ possuem sentidos opostos. A contribuição da borda da esquerda é nula, pois não há campo. A borda da direita contribui com uma força

$$\vec{F} = IwB\left(-\hat{i}\right).$$

Para que o circuito se mova com velocidade constante o estudante precisa fazer uma força igual e oposta. Dessa forma, a potência fornecida pelo estudante é

$$P_{\text{estudante}} = -\vec{F} \cdot \vec{v} = IwBv = \mathcal{E}I = \mathcal{E}^2/R.$$

Portanto:

$$\boxed{P_{\text{estudante}} = P_{\text{lamp}} = \mathcal{E}I = \mathcal{E}^2/R}$$

Vemos assim que, de fato, a potência fornecida pelo estudante é a responsável por fazer a lâmpada acender. O campo magnético transforma esse trabalho mecânico em energia elétrica.

Questão 4

O campo elétrico de uma onda eletromagnética plana se propagando no vácuo é dado por $\vec{E}(x,t) = E_0 e^{-\beta(x-ct)^2}\hat{j}$, onde β é uma constante positiva.

(a) (1,0 ponto) Calcule o vetor campo magnético desta onda. Deixe sua resposta em termos dos dados do enunciado.

(b) (0,5 ponto) Calcule o vetor de Poynting associado a esta onda.

(c) (1,0 ponto) Considere agora que a onda atinge uma placa perfeitamente absorvedora de área A, paralela ao plano yz. Calcule a energia total transferida pela onda à placa no intervalo de tempo $t = (-\infty, +\infty)$.

Solução da questão 4

(a) Aplicando a lei de Faraday na forma diferencial, encontramos:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \boxed{\vec{B}(x,t) = \frac{E_0}{c} e^{-\beta(x-ct)^2} \hat{k}}$$

(b) $$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \Rightarrow \boxed{\vec{S} = \frac{E_0^2}{c\mu_0} e^{-2\beta(x-ct)^2} \hat{i}}$$

(c) A energia total transferida para a placa é:

$$U = \int_{-\infty}^{+\infty} A\vec{S}(t) \cdot \hat{i} dt = \frac{AE_0^2}{c\mu_0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\beta(x-ct)^2} dt \Rightarrow \boxed{U = \frac{AE_0^2}{c^2\mu_0} \sqrt{\frac{\pi}{2\beta}}}$$

Formulário

$$\vec{F}=\frac{qq'(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3},\qquad \vec{F}=q\vec{E},\quad \vec{E}=\frac{q(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3},\qquad \vec{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{r^2}\hat{r},\qquad V=\frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|},$$

$$V=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{r},\quad \vec{E}=-\vec{\nabla}V,\quad U=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i<j}\frac{q_i\,q_j}{r_{ij}},\quad dA=2\pi r dr(\text{coordenadas}\quad\text{polares})$$

$$C=Q/V,\quad U=\frac{Q^2}{2C},\quad W=q\Delta V,\quad V_B-V_A=-\int_A^B\vec{E}\cdot d\vec{\ell},\quad \vec{E}=-\vec{\nabla}V,\quad d\vec{F}=Id\vec{\ell}\times\vec{B},\quad \vec{\mu}=I\vec{A},$$

$$\vec{\tau}=\vec{\mu}\times\vec{B},\quad \oint\vec{E}\cdot d\vec{A}=\frac{q_{int}}{\epsilon_0},\quad \oint\vec{B}\cdot d\vec{A}=0,\quad d\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2},\quad \oint\vec{E}\cdot d\vec{\ell}=-\frac{d}{dt}\int\vec{B}\cdot d\vec{A},$$

$$\mathcal{E}=-\frac{d\Phi_m}{dt},\quad \Phi^{total}=N\phi_{espira}=LI,\quad \Phi_{21}^{total}=N_2\phi_{espira}=M_{21}I_1,\ \ u_m=\frac{B^2}{2\mu_0},\ \ U=\frac{LI^2}{2},$$

$$\oint\vec{B}\cdot d\vec{\ell}=\mu_0 I+\mu_0\epsilon_0\frac{d}{dt}\int\vec{E}\cdot d\vec{A},\quad I=\int\vec{J}\cdot d\vec{A},\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\epsilon_0},\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0,\quad \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t},\quad \nabla^2\vec{E}=\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2},\quad \nabla^2\vec{B}=\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2},\quad c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}},\quad \vec{B}=\frac{\hat{c}\times\vec{E}}{c},$$

$$\vec{E}=E_m\cos(kx\pm\omega t+\phi)\,\hat{\jmath},\quad \vec{B}=B_m\cos(kx\pm\omega t+\phi)\,\hat{k},\quad k=\frac{2\pi}{\lambda},\quad \omega=\frac{2\pi}{T},\quad k\,c=\omega,$$

$$f=1/T,\quad \vec{S}=\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B},\quad S=uc,\quad u=u_e+u_m=\frac{\epsilon_0\,E^2}{2}+\frac{B^2}{2\mu_0},\quad I=<S>=\frac{E_m\,B_m}{2\mu_0},$$

$$<\cos^2(kx-\omega t+\phi)>=<\operatorname{sen}^2(kx-\omega t+\phi)>=1/2,\quad <\cos(kx-\omega t+\phi)\operatorname{sen}(kx-\omega t+\phi)>=0.$$

$$\cos A+\cos B=2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right),\quad \cos A-\cos B=2\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right).$$

$$\sin A+\sin B=2\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}),\quad \int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\sqrt{x^2+a^2}.$$

$$\int\frac{dx}{(c+x^2)^{3/2}}=\frac{x}{c\,(c+x^2)^{1/2}},\quad \int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a(bx+c)^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{ab^2}}$$