Correntes de Foucault e Indutância

20ª aula

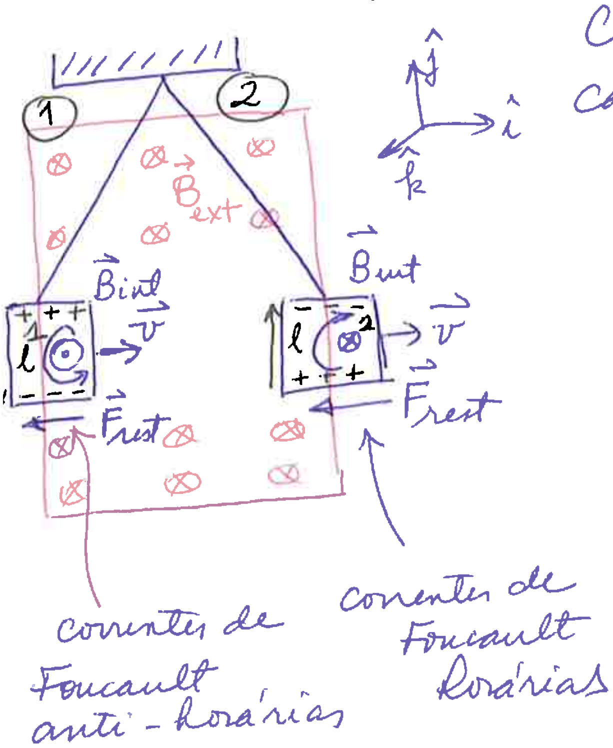
* Vimos que ϕ_m (fluxo do campo magnético) variável no tempo induz fem e I.

* Correntes fechadas, denominadas, Correntes de Foucault existem na massa de um metal que se move num campo magnético.

Experiência: Chapa plana de metal pendurada numa haste oscilando através de um campo magnético.

Correntes de Foucault sentem a ação do campo magnético $\vec{B}_{int}$ $\Rightarrow$ $\vec{F} = i\,\vec{l} \times \vec{B}_{int}$

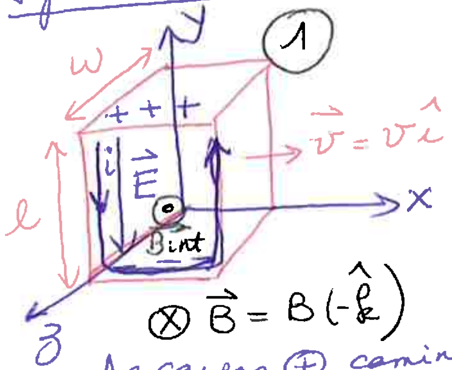
pois incide $\vec{l}$ e $\vec{B}_{int}$ na mesma direção



Situação ① $\Rightarrow$ Fluxo de B_{ext} aumenta $\Rightarrow$ aparece um contra-fluxo ①

Situação ② $\Rightarrow$ Fluxo de B_{ext} diminui $\Rightarrow$ aparece um contra fluxo ②

Aparecimento da corrente i



$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}_{ext}$

$\vec{F}_m = qvB_{ext}\underbrace{(\hat{i} \times (-\hat{k}))}_{\hat{j}}$

$\vec{F}_m = qvB_{ext}\hat{j}$

As cargas ⊕ caminham na direção de $\vec{E}$

$\vec{F}_{rest} = -il\hat{j} \times \vec{B}_{int}$

$\vec{F}_{rest} = -il\hat{j} \times B\hat{k} = ilB(-\hat{i}$

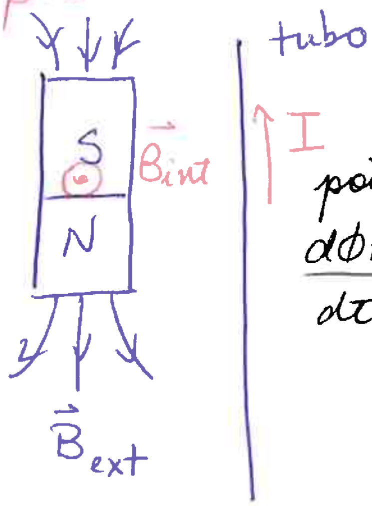
* A corrente induzida sempre provoca uma força retardadora (restauradora) $\vec{F}_{rest}$ contrária ao movimento quando a placa entra e sai do campo, de forma que a placa oscilante termina por ficar em repouso.

Utilidade: — sistema de frenagem de trens de metrô e de veículos elétricos.

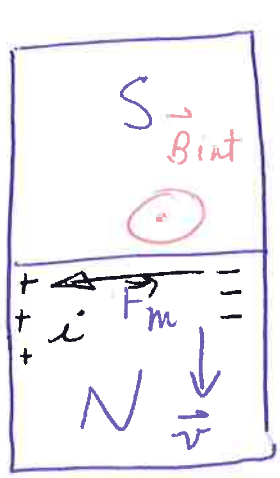
— balanças.

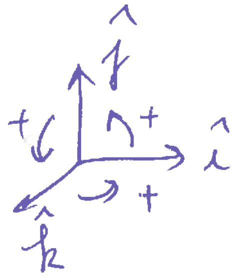
* Quando as correntes de Foucault são indesejáveis, (2)
porque dissipam energia na forma de calor, perda de energia mecânica
as partes condutoras móveis são feitas de lâminas superpostas separadas por um material não condutor ⇒ núcleo de transformadores e motores, a fim de minimizar as correntes de Foucault e aumentar a eficiência

Experiência do ímã no tubo:



pois varia $\frac{d\Phi_m}{dt} \Rightarrow \mathcal{E}$





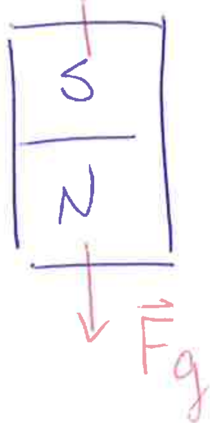
$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}_{int}$$
$$\vec{F}_m = q\left[v(-\hat{j}) \times B\hat{k}\right]$$
$$\vec{F}_m = -qvB\,\hat{i}$$

A corrente no interior do ímã interage com $\vec{B}_{int}$

$$\vec{F}_i = i\,\vec{l} \times \vec{B}_{int}$$
$$\vec{F}_i = i\left(-l\,\hat{i} \times B_{int}\hat{k}\right) \Rightarrow \vec{F}_i = i\,l\,B_{int}\,\hat{j}$$

interna

$\vec{F}_i$ = Fretardadora



* Vimos que uma espira rígida e estacionária atravessada por um $\vec{B}_{ext}$ (variável no tempo) ≡ gera uma fem = ddp ⇒ $\boxed{\mathcal{E} = -\frac{d\phi_m}{dt}}$

* Supondo que $\vec{B}_{ext} = 0$ e a espira sendo percorrida por uma corrente I, então haverá fluxo de $\vec{B}$ atravessando a espira, devido à própria corrente. (gerada por uma voltagem externa).

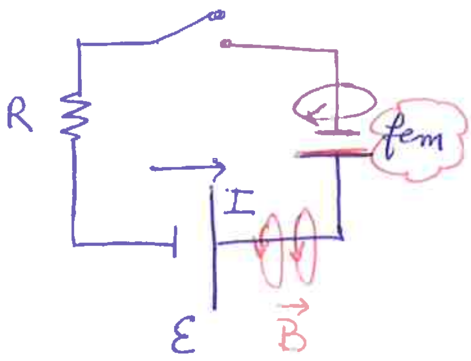
* Se I varia no tempo, o fluxo ϕ_m também varia ⇒ contra fluxo tende a ser induzido.

* Da equação: $\mathcal{E} = -\frac{d\phi_m}{dt} = -\frac{d\phi_m}{dI}\frac{dI}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$

auto-indutância ou indutância própria do circuito

$$L = \frac{d\phi_m}{dI}$$

Integrando, $\frac{d\phi_m}{dI} = L \Rightarrow \phi_m = LI$



A corrente não atinge $\frac{\mathcal{E}}{R}$ imediatamente;

* À medida que a corrente aumenta com o tempo, ϕ_m também aumenta, aparece uma fem que se opõe à variação do fluxo, o campo elétrico opõe-se à direção da corrente ⇒ fem auto-induzida em oposição faz a corrente aumentar devagar.

* No caso de N espiras no circuito ⇒ $\mathcal{E} = -N\frac{d\phi_m}{dt}$

$\therefore \mathcal{E} = -N\frac{d\phi_m}{dI}\frac{dI}{dt} \Rightarrow \boxed{L = +N\frac{d\phi_m}{dI}}$

Unidade: $\frac{\text{Weber}}{\text{Ampère}}$ ≡ Henry

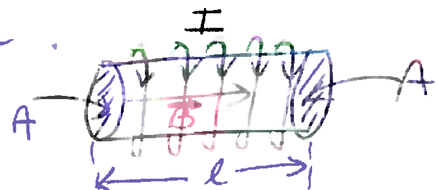
* Parâmetro $\underline{L}$ ≡ representa a inércia própria dos circuitos face à variação de corrente (sustentada por uma bateria)

* Assim como na capacitância, veremos que a indutância só depende das características geométricas do sistema (e não da corrente que o atravessa)

$\boxed{\text{Ex 1}}$. Supor um solenóide longo $l = 25\,cm$ e secção reta $4\,cm^2$ com 300 espiras. A corrente nesse solenóide diminui à taxa de $50\,A/s$.

(a) Calcule a auto-indutância,

(b) a fem auto-induzida.



(a) $L = N \dfrac{d\phi_m}{dI}$

Campo uniforme no interior do solenóide

$B = \mu_0 n I = \mu_0 \dfrac{N}{l} I$

$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$

$$\phi_m = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int B\,dA = \int \frac{\mu_0 N}{l} I\,dA$$

$$\phi_m = \frac{\mu_0 N}{l} \int I\,dA = \frac{\mu_0 N I A}{l}$$

varia só no tempo

$$L = N \frac{d\phi_m}{dI} = N \left(\frac{\mu_0 N A}{l}\right) \frac{dI}{dI} \Rightarrow \boxed{L = \frac{\mu_0 N^2 A}{l}}$$

só depende da simetria

$$L = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times (300)^2 \times 4 \times 10^{-4}}{25 \times 10^{-2}} \Rightarrow \boxed{L = 0,18\,mH}$$

(b) $\mathcal{E} = -L \dfrac{dI}{dt} \Rightarrow \mathcal{E} = -0,18 \times (-50) \Rightarrow$

$$\boxed{\mathcal{E} = 9,05\,mV}$$

* Vamos supor agora que existam N circuitos diferentes, e próximos, cada um com uma determinada corrente, em uma região com $B_{ext} = 0$. (1)

* Se as correntes sobre esses circuitos variarem, então:

O fluxo sobre a espira i (circuito i) ≡ fluxo devido à sua própria corrente (+) fluxo devido às outras espiras. (também varia)

$$\phi_i = \phi_{i1} + \phi_{12} + \dots + \phi_{ii} + \dots + \phi_{iN} \equiv \sum_{j=1}^{N} \phi_{ij}$$

* Assim, a fem no i-ésimo circuito será:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\phi_i}{dt} = -\left(\frac{d\phi_{i1}}{dt} + \frac{d\phi_{i2}}{dt} + \dots + \frac{d\phi_{ii}}{dt} + \dots + \frac{d\phi_{iN}}{dt}\right) = -\sum_{j=1}^{N} \frac{d\phi_{ij}}{dt}$$

* Novamente, sendo circuitos rígidos e estacionários: variações em ϕ_{ij} devido a variações em I_j $(i \neq j)$ em qualquer um dos circuitos:

$$\frac{d\phi_{ij}}{dt} = \frac{d\phi_{ij}}{dI_j}\frac{dI_j}{dt} \; ; \quad \frac{d\phi_{ij}}{dI_j} \equiv \text{variações do fluxo em } i$$

* Chama-se indutância mútua:

$$\boxed{M_{ij} = \frac{d\phi_{ij}}{dI_j} \quad (p/\, i \neq j)}$$

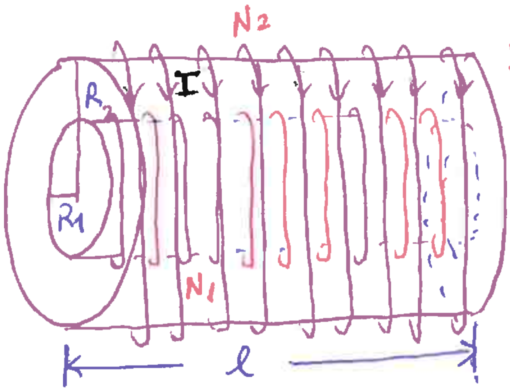
* Havendo 2 espécies apenas: $M_{12} = \dfrac{d\phi_{12}}{dI_2}$ [Henry]

* O nome Indutância Mútua ou Mútua Indutância vem do fato que

$$M_{12} = M_{21} \Rightarrow \boxed{M_{ij} = M_{ji}}$$

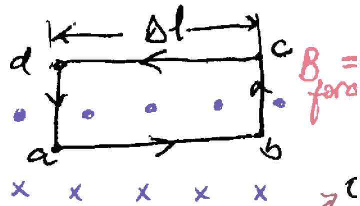
(não vou provar isso!)

Ex: Dois solenóides coaxiais ideais e muito longos, de comprimento l e raios R_1 e R_2 ($R_2 > R_1$) possuem N_1 e N_2 espiras, respectivamente. Se somente no solenóide externo passar uma corrente I, calcule o fluxo magnético através do solenóide interno. Calcule a indutância mútua do sistema. ②



Devemos calcular o fluxo do campo magnético através do solenóide 1 gerado por $\vec{B}$ do solenóide 2

Solenóide (lembran...



$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{B}\cdot d\vec{l} + \cancel{\int_b^c \vec{B}\cdot d\vec{l}} + \underbrace{\int_c^d \vec{B}\cdot d\vec{l}}_{B=0} + \cancel{\int_d^a \vec{B}\cdot d} \quad \vec{B} \perp$$

$$B\,\Delta l = \mu_0 I_{cond} = \mu_0 \frac{N_2 \Delta l}{l}$$

$$B = \mu_0 n_2 I \qquad \text{espira externa}$$

densidade de espiras no solenóide externo

$$\Phi_{sol_1} = \int \vec{B}\cdot d\vec{A} = N_1 \int \left(\frac{\mu_0 N_2}{l} I\right) dA$$

$$\Phi_{sol_1} = \frac{N_1 N_2 \mu_0 I}{l} \cdot \pi R_1^2$$

$$\Phi_{sol_1} = \frac{\mu_0 \pi R_1^2 N_1 N_2 I}{l}$$

$$M_{12} = \frac{d\Phi_{12}}{dI} \Rightarrow \boxed{M_{12} = M_{21} = \frac{\mu_0 \pi R_1^2 N_1 N_2}{l}}$$

só depende de parâmetros geométricos. $\left\{ n_2 = \frac{N_2}{l} \right.$

Energia do Campo Magnético

* Supor uma espira que em certo instante I tem uma corrente I ⇒ Qual é a potência instantânea?

(fornecida por um agente externo ≡ bateria)

$E_{cin} \Rightarrow \frac{dE_{cin}}{dt} = 0$ (não varia) $v = cte$

aumenta a carga $I = nqvA$

$$P = \frac{dW}{dt} = -\frac{dU}{dt}$$ (energia potencial ganha pelo sistema)

$E_m = E_{cin} + U$

$\Delta E_m = 0 \Rightarrow \Delta E_{cin} = -\Delta U$

* Supondo agora que o trabalho esteja sendo produzido devido a uma variação de fluxo na própria espira (devido à sua própria corrente)

$$P = \mathcal{E} I = -\frac{dU}{dt} \Rightarrow \underbrace{-\left(\frac{d\phi_m}{dt}\right)}_{\mathcal{E}} I = \underbrace{-\frac{dU}{dt}}_{\text{taxa de acúmulo de energia no indutor}}$$

$$\therefore \frac{dU}{dt} = \overset{=L}{\frac{d\phi_m}{dI}} \frac{dI}{dt} I$$

* Como $\underbrace{\frac{d\phi_m}{dI}}_{} = L \Rightarrow \frac{dU}{dt} = LI\frac{dI}{dt} \Rightarrow dU = LI\,dI$

* Calcular a energia total (potencial) para ir de $I=0$ em $t=0$ para $I=I$ em $t=t$ (supondo que não ocorre dissipação)

$$\int_0^U dU' = L\int_0^I I'\,dI' \Rightarrow \boxed{U_{\substack{\text{armazenado}\\ \text{no indutor}}} = \frac{1}{2}LI^2}$$

armazena I → armazena B

energia armazenada em um circuito com auto indutância L quando percorrido pela corrente I.

Comparar:

$$U_{capacitor} = \frac{Q^2}{2C} \equiv \text{armazena carga} \Rightarrow \text{armazena } E.$$

* Pergunta: Se há corrente em um condutor (espira) e a ela se está associando uma energia, como esta energia está armazenada?

* Veja, por exemplo, um indutor = solenoide longo de comprimento l e seção transversal A, com N espiras.

* No interior do solenoide $B = \mu_0 n I$ onde $n = \frac{N}{l}$

* Mas $\mathcal{E} = -\frac{d\phi_m}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$

* Calculando $\Phi_{1\,espira} = \int \vec{B}\cdot d\vec{A} = B\int dA = \frac{\mu_0 N I}{\ell} A$

* Para N espiras $\Rightarrow$ $\Phi_{Total} = \frac{\mu_0 N^2 I}{\ell} A$

$$L = \frac{d\phi_m}{dI} \Rightarrow \boxed{L = \frac{\mu_0 N^2 A}{\ell}}$$

* Portanto, quando percorrido por uma corrente I, a energia armazenada no solenóide (indutor) será:

$$U_m = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_0 N^2 A}{\ell}\right) I^2 = \frac{1}{2\mu_0}\underbrace{\left(\frac{\mu_0^2 N^2 I^2}{\ell^2}\right)}_{B^2}\underbrace{A\ell}_{volume}$$

* Assim, $U_m = \frac{1}{2\mu_0} B^2 V_{volume}$

* Ou seja, a densidade volumétrica de energia magnética:

$$u_m = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \Rightarrow U_m = \int_{volume} u_m \, dV_{volume}$$

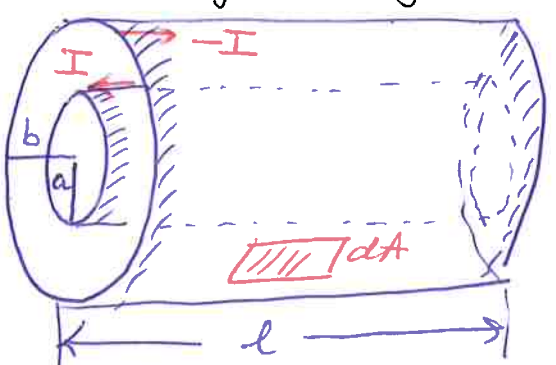
armazena B

* Comparar com $u_E = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$

* Exemplo: Um cabo coaxial de raios a e b (b>a) e comprimento ℓ é percorrido por uma corrente I (e −I). Supor os dois condutores como cascas cilíndricas muito finas.

(a) Calcule a autoindutância L

(b) A energia magnética total armazenada.

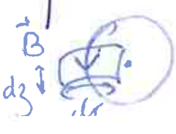


(a) $L = \frac{d\phi_m}{dI}$

onde $\phi_m = \int \vec{B}\cdot d\vec{A}$

e $B(a<r<b) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

(pela Lei de Ampère)



* Assim, $\phi_m = \int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\, dr \int_0^l dz$

$$\phi_m = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \cdot l \Rightarrow L = \frac{d\phi_m}{dI} \Rightarrow$$

$$\boxed{L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

só depende de parâmetros geométricos.

(b) $U_m = \frac{L I^2}{2} = \boxed{\frac{\mu_0 l I^2}{4\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$

$$\underbrace{u_m}_{\text{densidade de energia}} = \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{1}{2\mu_0} \frac{\mu_0^2 I^2}{4\pi^2 r^2}$$

outra forma

$$U_m = \int_{\text{volume}} u_m \, dV_{\text{volume}} = \int \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2} \underbrace{dV_{\text{volume}}}_{\text{integral tripla em coordenadas cilíndricas}}$$

$$\iiint r\,dr\,d\varphi\,dz$$

$$\therefore U_m = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2} \int_a^b \frac{\cancel{r}\,dr}{r^{\cancel{2}}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^l dz$$

$$U_m = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) \cdot 2\pi \cdot l$$

$$\boxed{U_m = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \ln \frac{b}{a}}$$

mesmo resultado anterior.