Uma derivação simples da Lei de Gauss

C. E. I. Carneiro

12 de março de 2009

Resumo

Apresentamos uma derivação da lei de Gauss (LG) no contexto da eletrostática. Mesmo para cargas em repouso, uma derivação rigorosa da LG necessita de uma discussão mais cuidadosa da parametrização de superfícies. Isto não é feito aqui. A finalidade principal deste texto é mostrar como a dependência do campo elétrico com o inverso do quadrado da distância faz com que seu fluxo através de uma superfície fechada independa da forma da superfície.

1 A lei de Gauss

A lei de Gauss é uma das equações fundamentais do eletromagnetismo e afirma que

$$\boxed{\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n}\, dA = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}},$$

ou seja o fluxo do campo elétrico **total** através de uma superfície **fechada** S é igual à carga líquida Q_{in} no **interior** da superfície. Note que

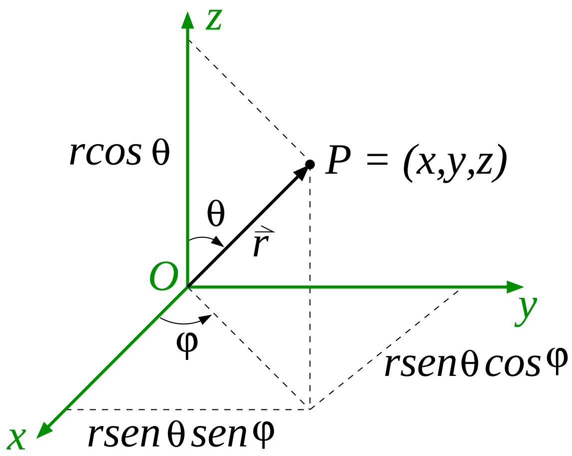
- $\vec{E}$ inclui as contribuições das cargas **internas** e **externas** à superfície.
- A normal $\vec{n}$ é externa à superfície.

Antes de estudarmos a lei de Gauss vamos rever algumas propriedades de superfícies.

2 Coordenadas Esféricas

Um ponto P com coordenadas cartesianas (x, y, z), a uma distância $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ da origem O, tem coordenadas esféricas (r, θ, φ) definidas através das relações,

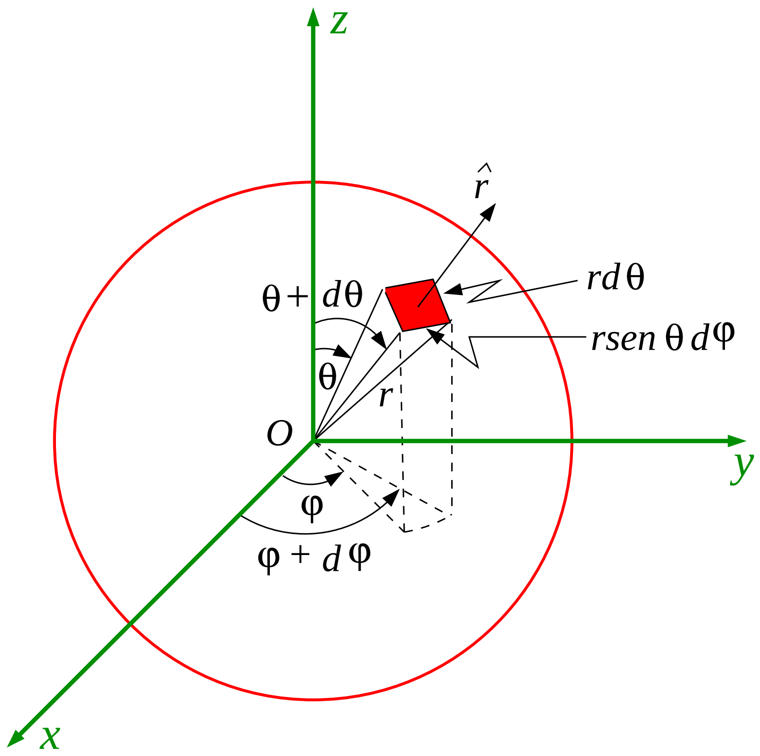
$$\begin{cases} x = r\text{sen}\,\theta\cos\varphi \\ y = r\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$



onde $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Podemos parametrizar uma superfície S usando θ e φ como parâmetros (Às vezes é necessário dividir a superfície em vários pedaços para efetuar esta parametrização.). Assim, uma superfície S pode ser caracterizada por uma função $r = r(\theta, \varphi)$, onde $\theta_{min} \leq \theta \leq \theta_{max}$ e $\varphi_{min} \leq \varphi \leq \varphi_{max}$. A função $r = r(\theta, \varphi)$ fornece a distância entre o ponto de S na direção (θ, φ) e a origem do sistema de coordenadas. Usaremos esta parametrização na demonstração da lei de Gauss mais adiante.

3 Área infinitesimal na superfície de uma esfera



A porção infinitesimal da superfície esférica de raio r, desenhada em vermelho na figura acima, é essencialmente um retângulo de lados $rd\theta$ e $r\text{sen}\theta d\phi$ e área

$$\boxed{dA = r^2\text{sen}\theta d\theta d\varphi \equiv r^2 d\Omega},$$

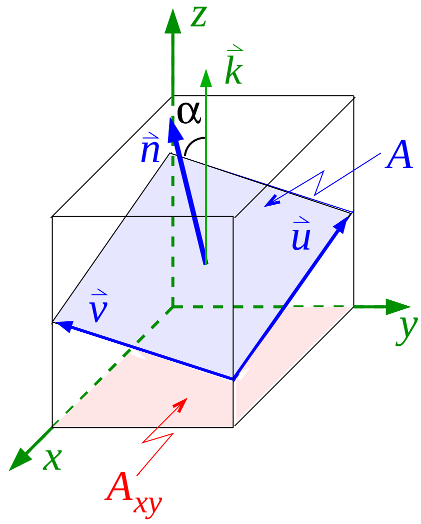
onde $d\Omega \equiv dA/r^2$ é chamado **ângulo sólido** [1]

[1]Em duas dimensões, o ângulo em radianos é definido pela razão (*comprimento de arco*)/*raio*. Em três dimensões, o ângulo sólido é definido pela razão (*área sobre a esfera*)/*raio*^{2}.

4 Projeção de áreas

Podemos projetar uma área infinitesimal sobre uma superfície usando o cosseno do ângulo entre as normais da área e da superfície. Na figura ao lado, para projetar uma superfície plana de área A no plano xy usamos o ângulo entre $\hat{n}$ e o eixo z

$$\boxed{A_{xy} = A\cos\alpha}$$



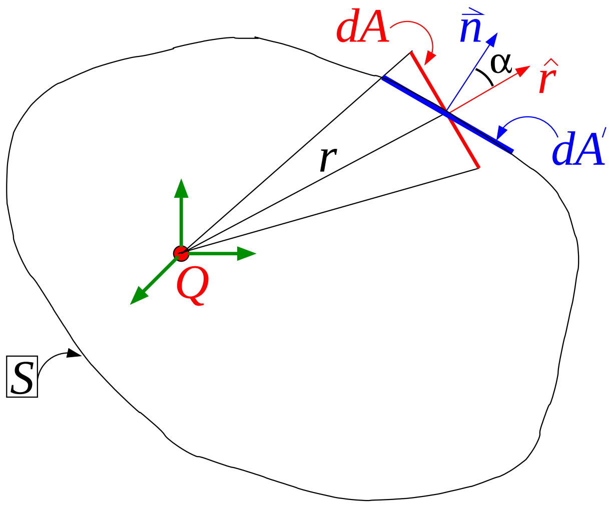
Parece estranho que baste um único cosseno para projetar uma área sobre uma superfície. Porém, se definirmos o **vetor área** como $\vec{A} = \vec{u}\times\vec{v}$, onde $\vec{u}$ e $\vec{v}$ estão ao longo dos lados da superfície azul de área A (veja a figura), então uma propriedade básica do produto vetorial garante que $A = |\vec{u}\times\vec{v}|$. Ou seja, o vetor $\vec{A}$ tem módulo igual à área A e direção dada pelo **versor normal** à superfície, $\vec{n}$. Desta forma fica fácil ver que projetar uma área sobre uma superfície é equivalente a calcular o produto escalar entre o vetor $\vec{A} = A\vec{n}$ e a normal a esta superfície (o versor $\vec{k}$ no exemplo da figura). O cosseno que aparece é o do produto escalar entre os versores $\vec{k}$ e $\vec{n}$. Se $\pi/2 < \alpha < \pi$ então $\cos\alpha < 0$, em outras palavras a projeção do vetor área pode ser negativa. Isto vai ser importante mais adiante quando calcularmos o fluxo do campo elétrico de uma carga externa a uma superfície.

O fato de podermos expressar a área como um vetor é importante na formulação da lei de Gauss. Lembre-se que o argumento da integral é $\vec{E}\cdot d\vec{A}$ que é o produto escalar dos dois vetores. Este produto independe do sistema de coordenadas usado. Poderíamos ter utilizado um outro sistema de coordenadas com outra origem, ou com os eixos orientados ao longo de outras direções, e mesmo assim obteríamos o mesmo resultado. É importante expressar as leis da Física de uma forma invariante.

5 Demonstração da Lei de Gauss

Vamos dividir a demonstração em dois casos:

5.1 Carga interna à superfície

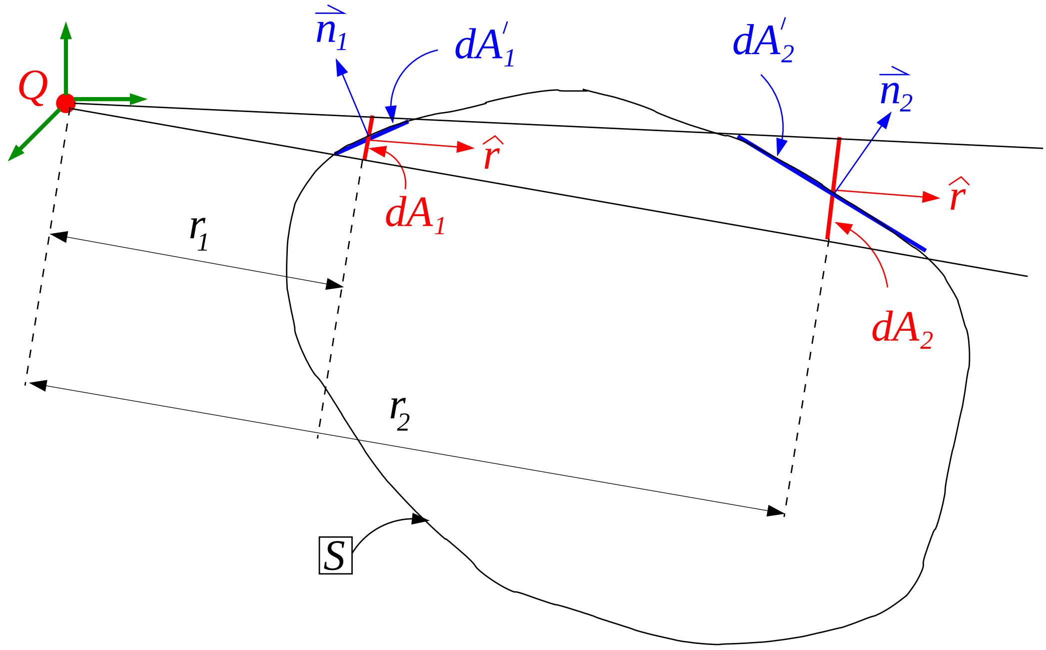


O fluxo Φ do campo elétrico através da superfície S devido à carga Q, interna à superfície, é dado por

$$\begin{aligned}\Phi &= \oint_S \vec{E}\cdot\vec{n}dA' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\oint_S \frac{\hat{r}}{r^2}\cdot\vec{n}dA' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\oint_S \frac{1}{r^2}\cos\alpha dA' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\oint_S \frac{1}{r^2}dA \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \mathrm{sen}\theta d\theta = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}4\pi = \frac{Q}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

Usamos: $\cos\alpha\, dA' = dA = r^2\mathrm{sen}\theta d\theta d\varphi$, ou seja o $\cos\alpha$ projeta a área dA' da superfície S sobre a superfície esférica de raio r. A área resultante desta projeção, $dA = r^2\mathrm{sen}\theta d\theta d\varphi$, contém um r^2 que cancela o fator $1/r^2$ que vem do campo elétrico da carga Q. Este cancelamento faz com que toda a dependência com a forma da superfície S desapareça (desde que a carga continue interna a S). Finalmente, observe que para varrer toda a superfície S devemos ter $0 \le \theta \le \pi$ e $0 \le \varphi < 2\pi$ quando a carga é interna.

5.2 Carga externa à superfície



O fluxo do campo elétrico através da superfície S devido à carga Q, externa à superfície, pode ser dividida em duas parcelas, conforme mostra a figura.

$$d\Phi_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{r}_1}{r_1^2}\cdot\vec{n}_1 dA_1' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r_1^2}\cos\alpha_1 dA_1' = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r_1^2}dA_1 = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}d\Omega$$
$$d\Phi_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{r}_2}{r_2^2}\cdot\vec{n}_2 dA_2' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r_2^2}\cos\alpha_2 dA_2' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r_2^2}dA_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}d\Omega$$

Observe que o ângulo α_1 entre $\vec{n}_1$ e $\hat{r}$ está no intervalo $[\pi/2, \pi]$ e portanto $\cos\alpha_1 dA_1' = -dA_1$. Este sinal de menos faz com que

$$d\Phi_1 + d\Phi_2 = 0.$$

Por este mecanismo é fácil de ver que o fluxo total Φ através de S vai ser zero se Q é externa.

Combinando os resultados dos dois casos obtemos

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}, \quad \text{onde} \quad Q_{in} \quad \text{é a carga dentro da superfície } S\,.$$

Note que a posição da carga não aparece na expressão acima. O que importa é se a carga é interna ou externa à superfície S. Assim, se houver várias cargas, podemos usar o princípio de superposição para afirmar que o campo e portanto o fluxo elétrico através de S é igual à soma do fluxo de cada uma das cargas. Cada carga Q_i **interna** à superfície S contribue com um fator Q_i/ϵ_0 para o fluxo. Portanto,

$$\boxed{\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{\sum_i Q_i}{\epsilon_0} \equiv \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}}\,.$$

Finalmente, você pode estar se perguntando porque incluimos o campo das cargas externas no cálculo da Lei de Gauss uma vez que elas não contribuem para a integral de superfície. A principal razão é que as leis do eletromagnetismo devem fazer afirmações sobre os campos elétrico e magnéticos totais. Estes são os campos que vão atuar sobre as cargas e correntes e são os campos que aparecem nas outras equações de Maxwell. Do ponto de vista do cálculo da integral de superfície que aparece na lei de Gauss, a inclusão do campo das cargas externas é uma questão de conveniência.