Termodinâmica 1 - FMT 159

Noturno, segundo semestre de 2009

Exercícios em classe: máquinas térmicas

30/10/2009

Há diversos tipos de motores térmicos, que funcionam tranferindo calor entre reservatórios térmicos e realizando trabalho mecânico com parte dele. Estamos cercados por elas! Carros, navios e aviões, aparelhos de ar condicionado, usinas termoelétricas ou nucleares são apenas alguns exemplos. Algum material, em geral um fluido, se aquece e se expande, realizando trabalho mecânico. Como esse processo precisa ser repetido diversas vezes, as máquinas térmicas operam com algum tipo de *ciclo termodinâmico*. Um ciclo termodinâmico é portanto uma sequência de processos (como expansão, aquecimento ou compressão) que se repetem; são realizados por algum fluido (chamado muitas vezes de fluido de trabalho), como um gás ou um lí quido, que faz funcionar o motor.

A máquina térmica mais eficiente possível, entre duas temperaturas $T_1 > T_2$ é uma máquina operando com um ciclo termodinâmico *reversí vel*, o ***ciclo de Carnot***, formado por duas isotermas, (a temperaturas T_1 e $T_2 < T_1$) e duas adiabáticas. Qualquer máquina térmica reversível tem o mesmo rendimento, ou seja, esse rendimento não depende das propriedades do fluido que executa o ciclo. Neste ciclo, TODAS AS TROCAS DE CALOR SÃO ISOTÉRMICAS

Vários outros ciclos termodinâmicos são possíveis, e muitos deles descrevem de forma idealizada o funcionamento de vários motores térmicos que encontramos a nossa volta. Por exemplo, motores funcionando segundo um ciclo conhecido como *ciclo Otto* equipam a maioria dos automóveis de passeio atualmente.

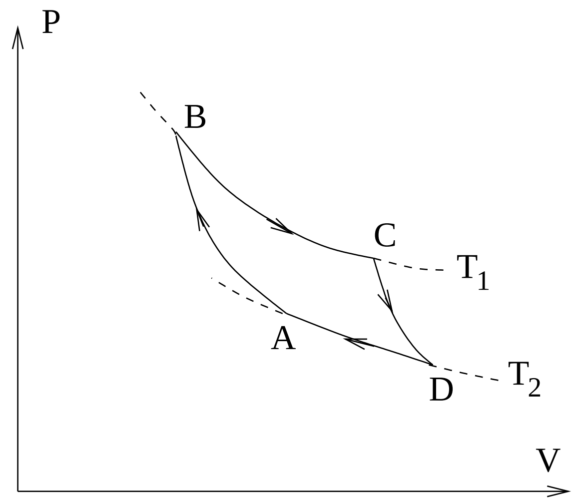

Figura 1: Ciclo de Carnot

Motores de combustão interna são máquinas térmicas nas quais o calor recebido pelo ciclo tem origem em uma reação química de combustão, que ocorre *dentro do motor*. Eles utilizam os próprios gases resultantes da combustão como fluido de trabalho. Nos *motores de combustão externa*, ao contrário, o processo de combustão ocorre fora do motor, esquentando um outro fluido que realiza o ciclo. Uma locomotiva a vapor ou a turbina a gás de uma usina termoelétrica operam com ciclos de combustão externa. Uma usina nuclear também é uma máquina térmica, mas não um motor a combustão, uma vez que o calor vem de uma *reação nuclear* de fissão, na qual massa se transforma em energia.

Máquina a vapor é o nome genérico dado a um motor que funciona pela transformação de energia térmica em mecânica, através da *expansão do vapor de água*. O primeiro motor a vapor foi proposto no final do século XVII, e estes foram aperfeiçoados durante o século XVIII, e utilizavam-se do fato que que um gás se contrai quando condensa e se expande quando evapora para realizar trabalho mecânico. Em seu ciclo, portanto, há uma *transição de fase*. O ciclo idealizado que descreve esse processo (com uma condensação e uma evaporação) é chamado as vezes *ciclo Rankine*.

No ciclo Otto, que descreve de forma idealizada o funcionamento de um tipo de motor a combustão interna, a ignição do combustível é causada por uma faísca. No chamado ciclo diesel - que também opera motores de combustão interna -, é o próprio processo de compressão que inicia a reação de combustão (não há faísca). Nenhum desses ciclos é tão eficiente quanto o ciclo de Carnot, e sua eficiência - ao contrário do que ocorre com o ciclo de Carnot - depende de propriedades do fluido que realiza o ciclo (como por exemplo o calor latente de evaporação).

A seguir vamos descrever brevemente alguns ciclos mais conhecidos e calcular a sua eficiência, *supondo sempre que o fluido que o execute seja um gás ideal com coeficiente adiabático* γ.

1. O ***Ciclo Otto*** foi implementado pela primeira vez pelo engenheiro alemão Nikolaus Otto, em 1876, e representa de forma idealizada o que ocorre no motor da maioria dos carros de passeio (a gasolina). Pode funcionar em *dois tempos* ou *quatro tempos.* O motor quatro tempos é mais eficiente e menos poluente, mas mais sofisticado tecnologicamente e e mais pesado. A figura abaixo representa um ciclo Otto (sem a fase de injeção e compressão final), que descreve o funcionamento de um motor a gasolina de quatro tempos. AB representa a compressão rápida (adiabática) da mistura de ar com vapor de gasolina. Nessa etapa o gás passa de um volume V_o para um volume V_o/r, onde r é a chamada *taxa de compressão.* BC representa um aquecimento a volume constante, e é causado pela ignição e queima da mistura combustível; CD é a expansão adiabática dos gases aquecidos, movendo o pistão e realizando trabalho; DA representa a queda de pressão associada à exaustão dos gases da combustão, que em geral são lançados na atmosfera.

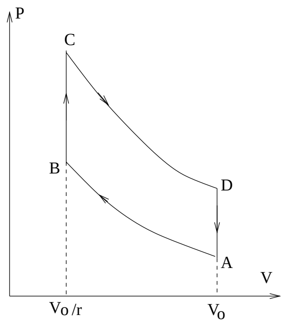

Figura 2: ciclo Otto: formado por duas adiabáticas ($Q = 0$) e duas isocóricas (V constante).

(a) mostre que o rendimento do ciclo (operado por um gás ideal) é dado por

$$\eta = 1 - \frac{T_D - T_A}{T_C - T_B} = 1 - \left(\frac{1}{r}\right)^{\gamma-1} ;$$

(b) Calcule η para $\gamma = 1,4$ e $r = 10$ (compressão máxima possível para evitar pré-ignição).

Solução:

A eficiencia de um ciclo termodinâmico é definida por $\eta = W/Q_1$, onde W é o trabalho realizado no ciclo e Q_1 é o calor *absorvido* da fonte quente.

No ciclo Otto, as trocas de calor ocorrem nas transformações isocóricas, a volume constante, onde não há trabalho realizado/recebido e nas quais, portanto, a variação de energia interna é toda devida ao calor.

$$\Delta U = Q - W = Q \qquad \text{já que} \quad W = 0.$$

Mas, para um gás ideal, em um processo a volume constante, $Q = C_v\ \Delta T$; como, para um gás ideal com coeficiente adiabático γ, $C_v = \dfrac{R}{\gamma - 1}$,

$$Q_1 = Q_{BC} = \frac{R}{\gamma - 1}\,(T_C - T_B).$$

O trabalho total realizado pelo ciclo é $W = W_{AB} + W_{CD}$. Em uma adiabática, $Q = 0$ e portanto $\Delta U = -W$. Como a energia interna é uma função de estado, $\Delta U = U_B - U_A$ não depende do caminho escolhido para ir de A a B, então

$$W_{CD} = -\Delta U_{CD} = \frac{R}{\gamma - 1}\,(T_C - T_D),$$

$$W_{AB} = -\Delta U_{AB} = \frac{R}{\gamma - 1}\,(T_A - T_B),$$

$$W = W_{CD} + W_{AB} = \frac{R}{\gamma - 1}(T_C - T_D + T_A - T_B) = \frac{R}{\gamma - 1}[(T_C - T_B) - (T_D - T_A)],$$

logo,

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{\frac{R}{\gamma-1}\,[(T_C - T_B) - (T_D - T_A)]}{\frac{R}{\gamma-1}\,(T_C - T_B)} = 1 - \frac{(T_D - T_A)}{(T_C - T_B)}.$$

Note que $r = V_0/V_B$. Para rescrever esse resultado em função de r lembramos que, em uma adiabática,

$$PV^\gamma = \text{constante}, \qquad TV^{\gamma-1} = \text{constante}, \qquad \frac{T}{P^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} = \text{constante}.$$

Portanto $T_C\,V_C^{\gamma-1} = T_D\,V_D^{\gamma-1}$ e $T_B\,V_B^{\gamma-1} = T_A\,V_A^{\gamma-1}$.

$$T_C\,V_C^{\gamma-1} = T_D\,V_D^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{T_D}{T_C} = \left(\frac{V_C}{V_D}\right)^{\gamma-1}, \quad \text{e}$$

$$T_B\,V_B^{\gamma-1} = T_A\,V_A^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{T_A}{T_B} = \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1}.$$

Como $V_A = V_D$ e $V_B = V_C$, temos $T_D/T_C = T_A/T_B$, ou $T_D/T_A = T_C/T_B$. Portanto

$$\eta = 1 - \frac{(T_D - T_A)}{(T_C - T_B)} = 1 - \frac{T_A\,(T_D/T_A - 1)}{T_B\,(T_C/T_B - 1)} = 1 - \frac{T_A}{T_B},$$

$$\eta = 1 - \left(\frac{1}{r}\right)^{\gamma-1},$$

como $\gamma = 1,4$ e $r = 10$ teremos

$$\eta = 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{0,4} \sim 0,60.$$

2. O ***ciclo Diesel*** representa de forma também idealizada o funcionamento de um outro tipo de motor a combustão interna, que opera os motores a diesel de caminhões e utilitários. Nele a ignição do combustível é feita pelo próprio aquecimento causado pela compressão. Foi inventado pelo engenheiro alemão Rudolf Diesel em 1897, e permite taxas de compressão maiores que as dos motores que funcionam com o ciclo Otto. Na figura abaixo temos a representação de um ciclo Diesel de quatro tempos. AB e CD são adiabáticas; a ignição ocorre a pressão constante (etapa BC), sem necessidade de uma faísca. a razão $r_c = V_o/V_1$ entre os volumes máximo e mínimo é chamada *taxa de compressão.* A *taxa de expansão adiabática* é definida como $r_e = V_o/V_2$.

   (a) Mostre que o rendimento de um ciclo Diesel (operado por um gás ideal) é dado por:

$$\eta = 1 - \frac{1}{\gamma}\left(\frac{T_D - T_A}{T_C - T_B}\right) = 1 - \frac{1}{\gamma}\frac{\left(\frac{1}{r_e}\right)^\gamma - \left(\frac{1}{r_c}\right)^\gamma}{\frac{1}{r_e} - \frac{1}{r_c}}.$$

   (b) Calcule η para $r_c = 15$, $r_e = 5$ e $\gamma = 1,4$.

   (c) Compare o rendimento com o de um ciclo de Carnot operando nas mesmas temperaturas extremas.

   Solução:

   Novamente, a eficiencia de um ciclo termodinâmico é definida por $\eta = W/Q_1$, onde W é o trabalho realizado no ciclo e Q_1 é o calor *absorvido* da fonte quente.

   No ciclo de Diesel, o calor absorvido pela fonte quente ocorre no processo isobárico, a pressão constante então

$$Q_1 = Q_{BC} = C_p(T_C - T_B)$$

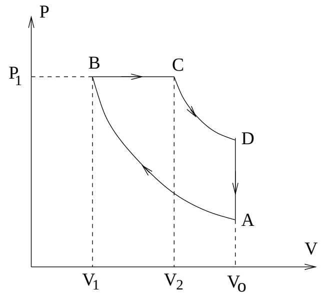

Figura 3: ciclo Diesel: formado por duas adiabáticas ($Q = 0$), uma isobárica (P constante) e uma isocórica (V constante).

lembre-se que se trata de um gás ideal com coeficiente adiabático γ, então $C_v = R/(\gamma - 1)$ e $C_p = R\gamma/(\gamma - 1)$ portanto

$$Q_1 = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}(T_C - T_B).$$

O trabalho total realizado pelo ciclo é $W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD}$. Os processos AB e CD são realizados adiabáticamente, $Q = 0$ e portanto $\Delta U = -W$. Como a energia interna é uma função de estado, ΔU_{AB} e ΔU_{CD} não depende do caminho escolhido, então

$$\begin{aligned} W_{AB} &= -\frac{R}{\gamma - 1}(T_B - T_A), \\ W_{CD} &= -\frac{R}{\gamma - 1}(T_D - T_C). \end{aligned}$$

Já o processo isobárico BC é

$$W_{BC} = Q_{BC} - \Delta U_{BC} = C_p(T_C - T_B) - C_v(T_C - T_B),$$

$$W_{BC} = R(T_C - T_B).$$

Então o trabalho total no ciclo é

$$W = -\frac{R}{\gamma - 1}(T_B - T_A) + R(T_C - T_B) - \frac{R}{\gamma - 1}(T_D - T_C),$$

$$W = \frac{R}{\gamma - 1}(T_A - T_D) + \frac{\gamma R}{\gamma - 1}(T_C - T_B).$$

Agora podemos calcular o rendimento

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{\frac{R}{\gamma-1}(T_A - T_D) + \frac{\gamma R}{\gamma-1}(T_C - T_B)}{\frac{\gamma R}{\gamma-1}(T_C - T_B)},$$

$$\eta = 1 - \frac{1}{\gamma}\frac{(T_D - T_A)}{(T_C - T_B)}.$$

Como vimos

$$PV^\gamma = \text{constante}, \qquad TV^{\gamma-1} = \text{constante}, \qquad \frac{T}{P^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} = \text{constante}.$$

Então usando a segunda igualdade nos processo CD e AB teremos

$$T_C V_C^{\gamma-1} = T_D V_D^{\gamma-1} \text{ e } T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1},$$

que substituindo em

$$\eta = 1 - \frac{1}{\gamma}\frac{(T_D - T_A)}{(T_C - T_B)},$$

teremos

$$\eta = 1 - \frac{1}{\gamma}\frac{\left(T_C\left(V_C/V_D\right)^{\gamma-1} - T_B\left(V_B/V_A\right)^{\gamma-1}\right)}{\left(T_C - T_B\right)},$$

como $V_A = V_D = V_0$, $V_C = V_2$ e $V_B = V_1$

$$\eta = 1 - \frac{1}{\gamma}\frac{\left(T_C\left(V_2/V_0\right)^{\gamma-1} - T_B\left(V_1/V_0\right)^{\gamma-1}\right)}{\left(T_C - T_B\right)},$$

$$\eta = 1 - \frac{1}{\gamma}\frac{\left(\frac{V_2}{V_0}\right)^{\gamma-1} - \frac{T_B}{T_C}\left(\frac{V_1}{V_0}\right)^{\gamma-1}}{\left(1 - \frac{T_B}{T_C}\right)}. \tag{1}$$

Como $V_A = V_D$, da relação no processo DA teremos

$$\frac{T_B}{T_C} = \frac{T_A}{T_D}\left(\frac{V_C}{V_B}\right)^{\gamma-1},$$

e como $P_B = P_C$ no processo BC então

$$\frac{T_A}{T_D} = \left(\frac{T_B}{T_C}\right)^{\gamma}\left(\frac{V_A}{V_D}\right)^{1-\gamma},$$

portanto como $V_A = V_D = V_0$, $V_C = V_2$ e $V_B = V_1$

$$\frac{T_B}{T_C} = \left(\frac{T_B}{T_C}\right)^{\gamma}\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1},$$

$$\frac{T_B}{T_C} = \frac{V_1}{V_2},$$

substituindo esse resultado na equação (1) teremos

$$\eta = 1 - \frac{1}{\gamma}\frac{\left(\frac{V_2}{V_0}\right)^{\gamma-1} - \frac{V_1}{V_2}\left(\frac{V_1}{V_0}\right)^{\gamma-1}}{1 - \frac{V_1}{V_2}},$$

multiplicando o numerador e o denominador por V_2/V_0 teremos

$$\eta = 1 - \frac{1}{\gamma}\frac{\frac{V_2}{V_0}\left(\frac{V_2}{V_0}\right)^{\gamma-1} - \frac{V_1}{V_0}\left(\frac{V_1}{V_0}\right)^{\gamma-1}}{\frac{V_2}{V_0} - \frac{V_1}{V_0}},$$

$$\eta = 1 - \frac{1}{\gamma}\frac{\left(\frac{V_2}{V_0}\right)^{\gamma} - \left(\frac{V_1}{V_0}\right)^{\gamma}}{\frac{V_2}{V_0} - \frac{V_1}{V_0}},$$

finalmente

$$\eta = 1 - \frac{1}{\gamma}\frac{\left(\frac{1}{r_e}\right)^{\gamma} - \left(\frac{1}{r_c}\right)^{\gamma}}{\frac{1}{r_e} - \frac{1}{r_c}}.$$

Substituindo $r_c = 15, r_e = 5$ e $\gamma = 1,4$ teremos

$$\eta = 1 - \frac{5}{7}\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{7/5} - \left(\frac{1}{15}\right)^{7/5}}{\frac{1}{5} - \frac{1}{15}} \sim 0,56.$$

Comparando esse resultado com o rendimento de uma máquina operando em um ciclo de Carnot entre as temperaturas mais extremas T_A e T_C

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_A}{T_C} = 1 - \frac{r_e}{r_c^{\gamma}} = 1 - \frac{5}{15^{1,4}} \sim 0,89$$

3. O ***ciclo Joule*** ou ***ciclo Brayton***, representado na figura abaixo, é uma idealização do que ocorre em uma turbina a gás, comumente empregada em usinas termoelétricas. AB e CD são adiabáticas, e BC e DA representam, respectivamente, aquecimento e resfriamento a pressão constante. $r = P_B/P_A$ é a taxa de compressão.

   (a) Mostre que o rendimento de um ciclo Joule no qual o fluido de trabalho é um gás ideal é dado por:

   $$\eta = 1 - \left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.$$

   (b) Calcule o rendimento para $r = 10$.

   (c) Compare o rendimento com o de um ciclo de Carnot operando as mesmas temperaturas extremas.

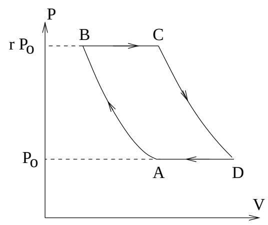

Figura 4: ciclo Joule ou Brayton: formado por duas adiabáticas ($Q = 0$) e duas isobáricas ($P =$ constante).

Solução:

Aqui o calor **absorvido** ocorre no processo isobárico BC

$$Q_1 = C_p\left(T_C - T_B\right)$$

E o trabalho total no ciclo é

$$W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA},$$
$$W = -\Delta U_{AB} + Q_{BC} - \Delta U_{BC} - \Delta U_{CD} + Q_{DA} - \Delta U_{DA},$$
$$W = Q_{BC} + Q_{DA} - \left(\Delta U_{AB} + \Delta U_{BC} + \Delta U_{CD} + \Delta U_{DA}\right),$$

como o ciclo é fechado e U é uma função de estado $\Delta U = 0$, teremos então

$$W = Q_{BC} + Q_{DA},$$

$$W = C_p\left(T_C - T_B\right) + C_p\left(T_A - T_D\right)$$

Então

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{C_p\left(T_C - T_B\right) + C_p\left(T_A - T_D\right)}{C_p\left(T_C - T_B\right)}$$
$$\eta = 1 + \frac{\left(T_A - T_D\right)}{\left(T_C - T_B\right)}$$
$$\eta = 1 + \frac{T_A}{T_B}\frac{\left(1 - T_D/T_A\right)}{\left(T_C/T_B - 1\right)}$$

Sabendo que nos processos adiabáticos AB e CD vale a igualdade $T/P^{(\gamma-1)/\gamma}$ =constante. E como $P_B = P_C$ e $P_A = P_D$, chegamos na identidade

$$\frac{T_C}{T_B} = \frac{T_A}{T_D} \text{ (façam as contas e comprovem!)},$$

então
$$\eta = 1 - \frac{T_A}{T_B},$$
como $T_A = P_A^{(\gamma-1)/\gamma}$ e $T_B = P_B^{(\gamma-1)/\gamma}$ e sabendo que $P_A = P_0$ e $P_B = rP_0$ então
$$\eta = 1 - \left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.$$
Substituindo $r = 10$ e $\gamma = 1,4$ na expressão acima teremos
$$\eta = 1 - (0,1)^{\frac{2}{7}} \sim 0,48.$$
Compare esse resultado com a eficiência de uma máquina operando em um ciclo de Carnot.

4. O ***ciclo de Stirling*** descreve o funcionamento de um motor de combustão externa, proposto pelo escocês Robert Stirling em 1816. É muito parecido com o ciclo de uma máquina a vapor, mas mais seguro. É também chamado "motor de ar quente", porque pode utilizar o ar como fluido de trabalho. Máquinas térmicas funcionando de acordo com esse ciclo tem um rendimento alto quando comparadas com as operadas por outros ciclos como o ciclo Otto ou Diesel. Seu rendimento é igual ao de um ciclo de Carnot, ou seja, trata-se de um ciclo reversível. A figura abaixo mostra um ciclo de Stirling. Ele consiste em uma compressão e uma expansão isotérmicas, seguidas por um aquecimento e um resfriamento, ambos a volume constante.

   (a) Mostre que para um gás ideal o rendimento do ciclo de Stirling é o mesmo do ciclo de Carnot, que representa o máximo rendimento possível entre as temperaturas T_1 e T_2.

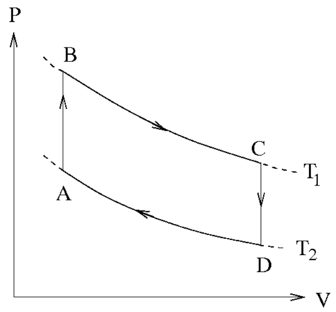

Figura 5: ciclo Stirling: formado por duas isotérmicas (T constante) e duas isocóricas (V constante).

Solução:

O calor absorvido no ciclo é
$$Q_1 = Q_{BC} = W_{BC} = RT_1 \ln(V_C/V_B),$$
Já que os processo CD e AB são isocóricos então $W_{CD} = W_{AB} = 0$. Sendo assim, o trabalho total é
$$W = W_{BC} + W_{DA},$$
$$W = RT_1 \ln(V_C/V_B) + RT_2 \ln(V_A/V_D).$$
O rendimento dessa máquina é
$$\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{RT_1 \ln(V_C/V_B) + RT_2 \ln(V_A/V_D)}{RT_1 \ln(V_C/V_B)},$$
$$\eta = 1 + \frac{T_2 \ln(V_A/V_D)}{T_1 \ln(V_C/V_B)}.$$
Como $V_C = V_D$ e $V_A = V_B$ então
$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$
que é igual ao rendimento de uma máquina operando em um ciclo de Carnot.