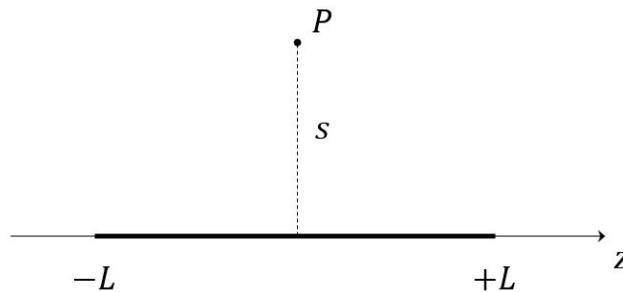


Eletrromagnetismo I - 4302303

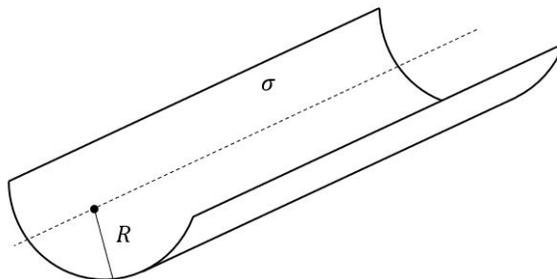
Lista 2

Resolva os problemas de 1 a 3 por **integração direta**. Isto é, não use a Lei de Gauss nem o potencial elétrico. A partir do problema 4, você pode resolver da forma que achar mais conveniente.

1. Encontre o campo elétrico a uma distância s acima do ponto central (ponto P) de um segmento de linha reta de comprimento $2L$, que tem uma densidade linear de carga uniforme λ , como mostra a figura abaixo. Cheque o limite $L \rightarrow \infty$ e obtenha *explicitamente* o campo elétrico gerado por um fio infinito.



2. A figura abaixo representa um sistema constituído de metade de uma superfície cilíndrica de raio de curvatura R , infinitamente longa e uniformemente carregada com densidade superficial de carga σ . Determine o campo elétrico sobre o eixo da distribuição (linha tracejada). Dica: Use o resultado do problema anterior.



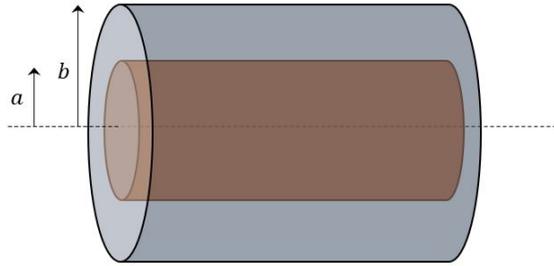
3. Encontre o campo elétrico a uma distância z acima do centro de um disco circular de raio R , que tem uma densidade superficial de carga uniforme σ . Cheque sua resposta no limite $R \rightarrow \infty$ e obtenha assim o campo elétrico gerado por um plano infinito.

4. Suponha que, ao invés da Lei de Coulomb, novos experimentos extremamente precisos revelaram que a força elétrica entre duas cargas pontuais q_1 e q_2 em repouso é, de fato;

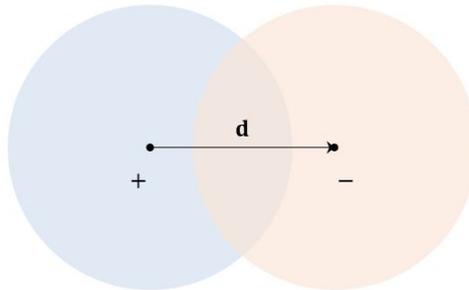
$$\mathbf{F}_{1(2)} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \left(1 + \frac{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|}{\lambda} \right) \frac{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|^3} e^{-\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|/\lambda},$$

em que λ é uma constante real positiva e $\mathbf{F}_{2(1)} = -\mathbf{F}_{1(2)}$. Você pode pensar que esse tipo de fenômeno deve estar associado à detecção de uma eventual massa do fóton, e que λ seria um parâmetro de comprimento proporcional ao inverso dessa quantidade. Nesse contexto, $1/\lambda$ seria um parâmetro **extremamente pequeno**, razão pela qual ele não seria detectado sem a ajuda de equipamentos altamente precisos. Repare que o limite $\lambda \rightarrow \infty$ na expressão acima retoma a Lei de Coulomb. A tarefa aqui é reconstruir as Leis fundamentais da Eletrostática, supondo que ainda é válido o Princípio da Superposição.

- Comece definindo uma expressão para o campo elétrico \mathbf{E} de uma carga pontual q e, a partir disso, obtenha uma expressão integral para \mathbf{E} de uma distribuição contínua de cargas $\rho(\mathbf{x})$.
 - Calcule $\nabla \cdot \mathbf{E}$ diretamente a partir da expressão integral obtida no item (a). Compare com o que deveria ser a partir da Lei de Coulomb.
 - Considere uma carga pontual e um plano contendo essa carga (para facilitar, você pode colocar a carga na origem e considerar o plano xy). Escolha uma curva fechada Γ sobre o plano em torno dessa carga e calcule $\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$. Compare com o resultado obtido a partir da Lei de Coulomb.
 - Este novo campo elétrico admite um potencial escalar, de forma que podemos escrever $\mathbf{E} = -\nabla\phi$? A partir disso, estude o rotacional de \mathbf{E} .
 - Por fim, considere novamente uma carga pontual e calcule o fluxo $\oint_{\mathcal{S}} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$, onde \mathcal{S} é uma superfície esférica de raio R centrada na posição da carga. Compare com a Lei de Gauss da Eletrostática usual, baseada na Lei de Coulomb. Esse resultado é compatível com o que você obteve para $\nabla \cdot \mathbf{E}$ no item (b)?
5. Encontre o campo elétrico dentro e fora de uma esfera de raio R , centrada na origem, com uma densidade de carga volumétrica dependente da distância do centro da forma $\rho(\mathbf{x}) = k\|\mathbf{x}\|^n$, sendo k uma constante real não-nula e n um inteiro positivo.
6. Considere uma esfera maciça de raio R carregada uniformemente tal que sua carga total é Q . Calcule a força elétrica sobre o hemisfério norte da esfera. Expresse sua resposta em termos de Q e R .
7. Um cabo coaxial longo possui uma densidade *volumétrica* de carga uniforme ρ , positiva, no cilindro interno (raio a), e uma densidade *superficial* de carga uniforme na casca externa do cilindro (raio b). Essa carga superficial é negativa e de magnitude exata para que o cabo, como um todo, seja eletricamente neutro. Encontre o campo elétrico em todo o espaço (onde ele é bem definido), e escreva a densidade superficial de carga em $s = b$ em termos de ρ , a e b . Trabalhe com coordenadas cilíndricas. Faça um gráfico de $\|\mathbf{E}\|$ em função de s . Encontre agora o potencial elétrico em todo o espaço, assumindo que $\phi(s = 0) = \phi_0$. Em particular, indique o valor da diferença de potencial $\phi(b) - \phi(a)$. Por fim, calcule a energia eletrostática armazenada na configuração por unidade de comprimento do cabo.



8. Duas esferas, cada uma com raio R e com distribuições volumétricas de carga de densidades uniformes $+\rho$ e $-\rho$, respectivamente, estão posicionadas de forma que se sobrepõem parcialmente, como mostra a figura abaixo. Chame o vetor que descreve o deslocamento entre os centros das esferas de \mathbf{d} . Calcule o campo elétrico *na região de sobreposição* e mostre que ele é uniforme.



9. Uma distribuição de carga estática produz um campo elétrico radial da forma

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = A \frac{e^{-br}}{r^2} \hat{\mathbf{e}}_r,$$

em que $A \neq 0$ e $b > 0$ são constantes reais. Encontre a densidade de carga ρ e faça um gráfico de ρ em função de r . Qual é a carga *total* desse sistema?

10. O potencial eletrostático médio criado pelo átomo de hidrogênio em seu estado fundamental pode ser escrito em coordenadas esféricas como

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \frac{q_e}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-2r/a_0}}{r} \left(1 + \frac{r}{a_0} \right),$$

sendo q_e a carga elementar e a_0 o raio de Bohr. Obtenha a densidade de carga em todo o espaço e a interprete fisicamente.

11. Considere duas cargas pontuais q_1 e q_2 , localizadas nos pontos \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 . Não há mais nenhuma outra carga no espaço. Obtenha a energia eletrostática associada à **interação** entre as cargas, W , relacionando-a com o trabalho realizado para construir a configuração.

A seguir, nosso objetivo é calcular a energia total armazenada na configuração através da expressão geral

$$U_E = \frac{\epsilon_0}{2} \int \|\mathbf{E}\|^2 d^3x,$$

onde $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$, e compará-la com o seu cálculo anterior. Você deve lembrar das aulas que essa integral **não converge** para campos de cargas pontuais. Porém, antes de avaliar a integral explicitamente, mostre que U_E pode ser reorganizado como

$$U_E = U_1 + U_2 + U_{\text{int}},$$

em que U_1 e U_2 são as energias eletrostáticas associadas apenas aos campos \mathbf{E}_1 e \mathbf{E}_2 , individualmente, e U_{int} é um termo de interação envolvendo produtos cruzados entre os dois campos. Prove que, ao contrário de U_1 e U_2 , U_{int} **converge** e é exatamente igual à W . Interprete fisicamente.

12. Compare a energia eletrostática de uma esfera maciça isolante uniformemente carregada e uma esfera condutora, ambas de carga total Q e raio R . Use essa diferença para tentar argumentar *fisicamente* que, se as cargas podem se mover livremente, a localização na superfície - fenômeno que ocorre em condutores carregados com configurações de cargas estáticas - é tal que minimiza a energia eletrostática. (Essa última parte é um “pense sobre isso...”)
13. Considere um condutor carregado cujo formato é arbitrário. A densidade de carga sobre os pontos de sua superfície é $\sigma(\mathbf{x})$. Mostre que a força elétrica por unidade de área sobre um elemento de carga localizado em \mathbf{x} , devido a todo o restante da superfície, é dado por

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{\sigma(\mathbf{x})^2}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}},$$

onde $\hat{\mathbf{n}}$ é a normal à superfície no ponto \mathbf{x} .