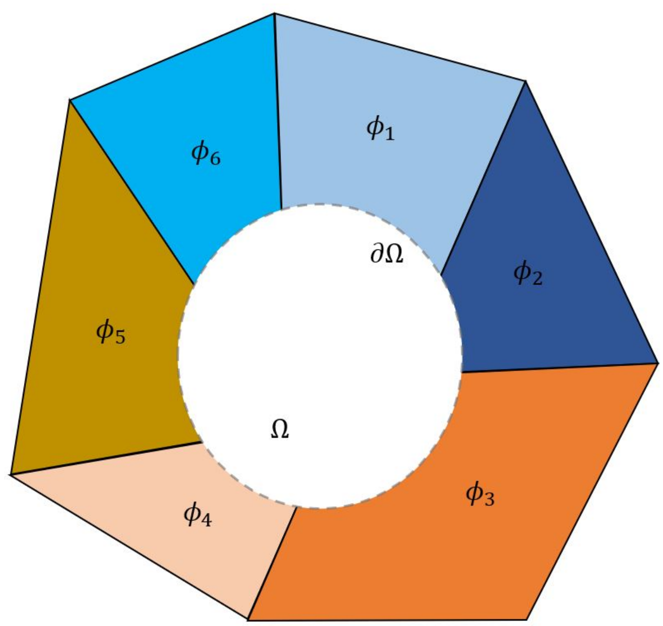
Eletromagnetismo I - 4302303
Lista 3

1. Considere uma cavidade de forma arbitrária completamente cercada por um conjunto de estruturas condutoras, todas de formas também arbitrárias. Chame o volume da cavidade de Ω e sua superfície (isto é, a fronteira entre a cavidade e a coleção de condutores) de $\partial\Omega$. A figura abaixo mostra a ideia do arranjo, em que cada um dos condutores (cada um representado por uma cor) é mantido em seu próprio potencial e suponha que não haja contato elétrico entre eles. Na figura, os potenciais dos condutores estão denotados por $\phi_1, \phi_2, \ldots$. Considere agora *duas* situações distintas:

   (a) os potenciais dos condutores são tais que o potencial é uma função $\phi(\mathbf{x})$ em $\partial\Omega$ e existe tanto uma densidade de carga $\rho(\mathbf{x})$ no interior de Ω quanto uma densidade superficial σ em $\partial\Omega$.

   (b) os potenciais dos condutores são tais que o potencial é uma função $\phi'(\mathbf{x})$ em $\partial\Omega$ e existe tanto uma densidade de carga $\rho'(\mathbf{x})$ no interior de Ω quanto uma densidade superficial σ' em $\partial\Omega$.

   Em outras palavras, as situações (a) e (b) representam dois problemas de condições de contorno diferentes, com distribuições de cargas diferentes, sobre a *mesma* estrutura (isto é, mesmo domínio; mesmo Ω e $\partial\Omega$).



   Prove que

$$\int_{\Omega} \phi(\mathbf{x})\rho'(\mathbf{x})d^3x + \oint_{\partial\Omega} \phi(\mathbf{x})\sigma'(\mathbf{x})dS = \int_{\Omega} \phi'(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x})d^3x + \oint_{\partial\Omega} \phi'(\mathbf{x})\sigma(\mathbf{x})dS, \quad (1)$$

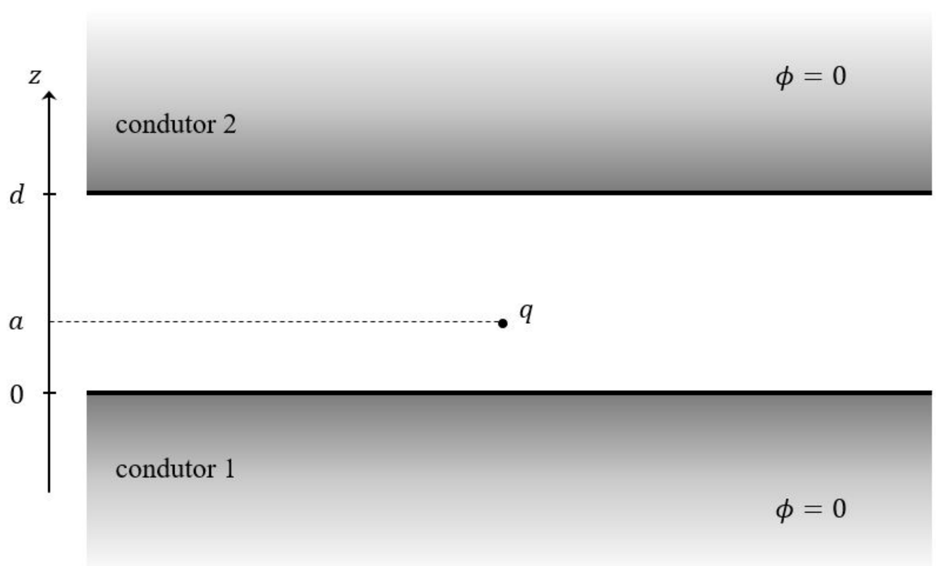
igualdade por sua vez conhecida como **Teorema da reciprocidade de Green**. *Sugestão:* Use a Segunda Identidade de Green.

Obs: Caso estivéssemos tratando de uma cavidade dentro de um único condutor, o potencial em $\partial\Omega$ seria uma função constante. Essa coleção de condutores só é importante para que o resultado seja um pouco mais geral, em que o potencial em $\partial\Omega$ não seja necessariamente uma constante. Os valores $\phi_1, \phi_2, ...$, especificamente, são irrelevantes na prova do Teorema.

Repare como esse resultado é poderoso! O Teorema acima fornece uma maneira elegante de relacionar soluções de dois problemas de condições de contorno diferentes apenas exigindo que o domínio seja o mesmo. Isso quer dizer que se tivermos que resolver um problema "difícil", uma possível estratégia é simplesmente **trocá-lo** por um problema mais fácil, resolvê-lo, e, a partir disso, finalmente obter informações sobre o problema original. Aplicaremos essa ideia no problema a seguir.

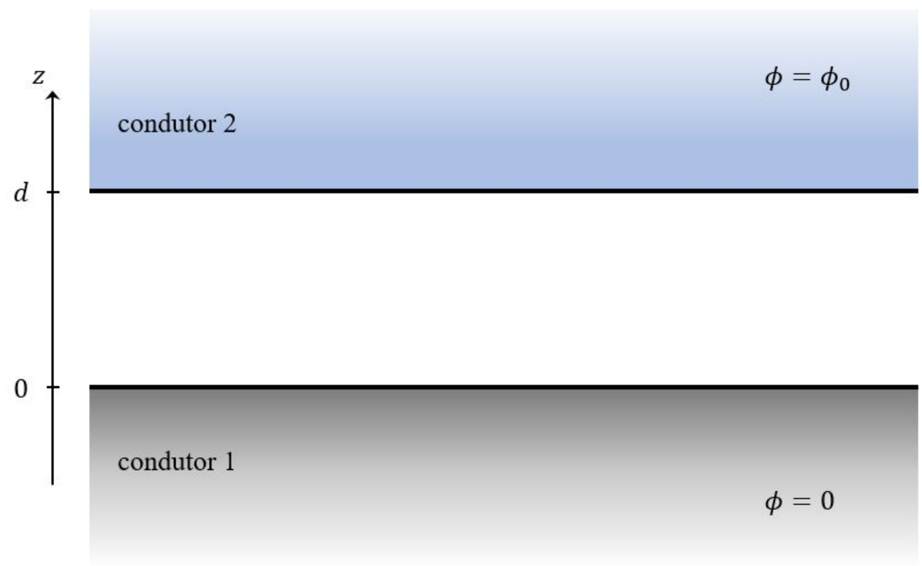
2. Considere dois condutores aterrados ($\phi = 0$) com bordas paralelas separados por uma distância d, como mostra a figura abaixo. Os condutores são infinitos nas extensões x e y. Ao longo da direção z, o condutor 1 cobre todo o conjunto $-\infty < z \leq 0$, enquanto que o condutor 2 cobre todo o conjunto $d \leq z < \infty$. Uma carga pontual q é colocada no espaço entre eles, a uma distância a da borda do condutor 1 (sempre considere $0 < a < d$). O objetivo aqui é encontrar as cargas *totais* induzidas nas superfícies dos condutores. No espírito do comentário acima, sobre a questão 1, chamaremos esse de *problema original*.

Problema original



Este é um problema complicado, pois não sabemos exatamente de que forma essas cargas se distribuem. Em outras palavras, não sabemos de antemão escrever as funções $\sigma_1(x, y)$ e $\sigma_2(x, y)$, e as cargas totais são as integrais dessas funções sobre as respectivas superfícies. Vamos então explorar a estratégia de considerar um *problema auxiliar*, em que não há cargas pontuais na região entre os condutores e o condutor 2 está mantido a um pontencial $\phi_0 \neq 0$, como mostra a figura abaixo (o condutor 1 permanece aterrado). Nesse caso, encontre o potencial em todo o espaço e as densidades de carga $\sigma_1(x, y)$ e $\sigma_2(x, y)$ nas superfícies dos condutores 1 e 2, respectivamente. Em seguida, utilize a o Teorema da reciprocidade de Green para resolver o problema original.

Problema auxiliar



Obs$_1$: É importante ficar claro que resolver o problema auxiliar é encontrar o potencial elétrico em todo o espaço e as densidades de carga na superfície, enquanto que resolver o problema original é apenas encontrar as cargas induzidas totais nas superfícies.

Obs$_2$: Convença-se de que, tanto no problema original quanto no problema auxiliar, podemos aplicar o Teorema da reciprocidade de Green considerando todo o espaço entre os condutores como sendo Ω, e as integrais sobre $\partial\Omega$ se reduzem a integrais sobre as superfícies dos condutores.

3. Uma carga pontual q é posicionada a uma distância a acima de um plano condutor aterrado. Encontre o potencial em **todo** o espaço. Utilize sua resposta para encontrar a função de Green $G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ específica para essa superfície de contorno. Sugestões: O plano divide o espaço em duas regiões; Utilize a unicidade de soluções para resolver o problema na região que não contém a carga e o método das imagens para resolver o problema na região que contém a carga.

4. Um plano isolante infinito é posicionado sobre o plano xy. O material que constitui o plano é feito de forma que potencial sobre seus pontos é dado pela expressão

$$\phi_P(x, y) = \phi_0 \exp\left[-\frac{(x^2 + y^2)}{2\alpha^2}\right],$$

em que ϕ_0 e α são constantes reais e positivas de dimensões físicas apropriadas. Encontre o potencial em todos os pontos do eixo z para $z > 0$. *Dica:* Perceba que esse é um problema de Dirichlet cuja função de Green é a que você encontrou no problema anterior. *Obs:* Você pode deixar a resposta em termos de uma integral, caso prefira. Você também pode estudar a resposta numericamente, utilizando alguma ferramenta computacional de preferência.

5. Uma carga pontual q é colocada a uma distância d do centro de uma esfera condutora de raio $R < d$. Encontre o potencial elétrico em todo espaço, assumindo que a esfera condutora está aterrada [*Dica:* Utilize o método das imagens]. Obtenha a densidade de carga e a carga total induzida na superfície da esfera condutora. Calcule a força elétrica sobre a carga pontual. Você é capaz de encontrar a função de Green $G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ para esse problema? Alguma das respostas mudaria caso a esfera condutora fosse substituída por uma casca esférica condutora?

6. Uma carga pontual q é colocada a uma distância d do centro de uma esfera condutora de raio $R < d$. Encontre o potencial elétrico em todo espaço, assumindo que a esfera condutora está mantida a um potencial ϕ_0. Obtenha a densidade de carga e a carga total na esfera condutora. Calcule a força elétrica sobre a carga pontual.

7. Uma carga pontual q é colocada a uma distância d do centro de uma esfera condutora de raio $R < d$. Encontre o potencial elétrico em todo espaço, assumindo que a esfera condutora está isolada e possui uma carga total Q. Obtenha a densidade de carga e a carga total na esfera condutora. Calcule a força elétrica sobre a carga pontual.

8. Refaça os problemas 5, 6 e 7 considerando uma casca esférica condutora no lugar da esfera e que a carga pontual é colocada no interior da mesma, a uma distância $d < R$ do centro. Cheque a validade das respostas no limite $d \to 0$.