

# **Notas Introdutórias**

## **Eletromagnetismo I**

L. M. Cornetta

Instituto de Física da Universidade de São Paulo

O presente documento, organizado em 11 seções, contém uma coleção de noções, definições, identidades, resultados e outros comentários que serão valiosos no decorrer da disciplina de Eletromagnetismo I (4302303). O nome *Notas Introdutórias* busca estabelecer a ideia de que seu conteúdo deve ser um “pontapé inicial”, confortável, a partir do qual trabalharemos. A primeira tarefa do curso é passar a limpo esse conteúdo aqui apresentado. O texto contém um conjunto cuidadosamente selecionado de problemas e identidades a serem demonstradas em todas as seções (trate todas elas com carinho), e um dos propósitos dessa tarefa é que vocês construam um glossário particular de resultados, expressões e identidades úteis. Ao longo das aulas, farei **muitas** referências a esses resultados, e me basearei nas numerações das equações - indicadas à direita - e/ou nas numerações em **vermelho** - indicadas à esquerda, quando for o caso. Sendo assim, pode ser bastante conveniente que você tenha sempre um acesso fácil a essas Notas para eventuais consultas.

# Sumário

1	Vetores em $\mathbb{R}^3$ e álgebra vetorial	5
2	Símbolos especiais	11
3	Coordenadas cartesianas e componentes de vetores em $\mathbb{R}^3$	13
4	O vetor posição	17
5	Campos	21
6	Algumas propriedades do cálculo diferencial	25
7	Algumas propriedades do cálculo integral	33
8	Coordenadas curvilíneas	39
9	O delta de Dirac	51
10	Um divergente especial	55
11	Funções de dois pontos	59



## Seção 1

# Vetores em $\mathbb{R}^3$ e álgebra vetorial

Antes de começarmos, parto do pressuposto de que você já tenha alguma familiaridade com vetores, com a noção de espaços vetoriais e de como vetores são utilizados em diferentes assuntos da Física. Também assumirei que você tenha alguma familiaridade com o conceito de matriz e algumas propriedades básicas, como traço e determinante de uma matriz quadrada. Ainda assim, dedico esta primeira seção a uma brevíssima recapitulação de aspectos básicos (e úteis!) da álgebra de vetores.

Não é incomum, principalmente em contextos mais introdutórios, um vetor ser entendido, simplesmente, como um objeto matemático ao qual podemos associar propriedades como módulo (magnitude), direção e sentido. Essa ideia, juntamente com algumas operações algébricas, por vezes é suficiente para descrever grandezas de natureza vetorial como posição, deslocamento, força, entre outras. Porém, para nossa abordagem, essas definições não são inteiramente satisfatórias, e uma estruturação mais robusta de conceitos, notações e propriedades se faz necessária. É importante ressaltar que alguns detalhes e definições podem variar a depender de autores ou contextos.

Busco, na medida do possível, respeitar a ordem em que essa revisão sobre análise vetorial é feita em capítulos iniciais de livros clássicos de Eletromagnetismo, como o texto *Introduction to Electrodynamics*, de David J. Griffiths. Vale a pena ter em mente, no entanto, que algumas das noções discutidas nesta seção farão mais sentido com o decorrer das seções seguintes.

Começemos com algumas definições e comentários pertinentes:

- No espaço tridimensional, tratamos todo o  $\mathbb{R}^3$  como um espaço vetorial e um vetor é um elemento desse espaço, comumente denotado por uma letra sob o símbolo de “flecha” (ou “seta”), como por exemplo  $\vec{a}$  ou  $\vec{R}$ . Durante as aulas, é essa notação que utilizaremos. Contudo, também é comum na literatura o uso da fonte em **negrito** para designar um vetor, como  $\mathbf{a}$  ou  $\mathbf{R}$ , seguindo o mesmo exemplo. Em notas de aula e Listas de exercícios, essa notação em **negrito** será preferida. No decorrer do curso, é sempre imprescindível diferenciar vetores de quantidades *escalares*, e esse é um dos motivos pelos quais estabelecer uma notação consistente é fundamental.
- O *módulo* de um vetor  $\mathbf{a}$  é uma função do tipo  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$  denotada por  $\|\mathbf{a}\|$ , e representa

a magnitude (ou o valor do comprimento, em alguma unidade apropriada) do vetor  $\mathbf{a}$ . A barra dupla foi escolhida pois deixaremos a notação de barra simples reservada para denotar o módulo de uma quantidade escalar. Ou seja, enquanto que o módulo de um vetor é uma função do tipo  $\|\cdot\| : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$ , temos que o módulo de um escalar é do tipo  $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ . A função módulo será definida com mais detalhes adiante. É bastante comum, ao lidarmos com o módulo de um vetor designado por uma letra em **negrito**, ou com um símbolo de “*flecha*” sobre a mesma, que usemos a mesma letra *sem* a notação vetorial para denotar seu módulo. Isso significa uma notação como, por exemplo,  $a = \|\mathbf{a}\|$ .

- Um vetor  $\mathbf{u}$  é dito *unitário* se, no sistema de unidades adotado,  $\|\mathbf{u}\| = 1$ .
- O vetor *nulo* é o vetor de módulo igual a zero. Esse vetor é único, no sentido de que  $\mathbf{a}$  é o vetor nulo se, e somente se,  $\|\mathbf{a}\| = 0$ . As propriedades de direção e sentido ficam indefinidas para o vetor nulo. Uma notação possível para designar o vetor nulo seria  $\mathbf{0}$ , ou até mesmo  $\vec{0}$ . Vale pontuar, no entanto, que parece haver uma espécie de consenso - ou “licença poética”, se preferir - em que simplesmente se usa o símbolo 0, sem notação vetorial, para se referir ao vetor nulo. Dessa forma, se  $\mathbf{a}$  é o vetor nulo podemos simplesmente escrever  $\mathbf{a} = 0$ , sem nenhum **negrito** ou “*flecha*” sobre o 0, de forma que o entendimento é dado pelo contexto. Isso é uma infelicidade, embora seja perfeitamente superável.
- Podemos representar um vetor não-nulo como uma “*flecha*” (ou “*seta*”) em um *diagrama* (Ver figura 1.1). O comprimento dessa “*flecha*” deve ser de alguma forma proporcional ao seu módulo e as propriedades de direção e sentido ficam devidamente representadas.
- Apesar das propriedades módulo, direção e sentido, poderem ser atribuídas, um vetor não possui “*início*” ou “*fim*” bem definidos. Esse é um equívoco relativamente comum. Se, numa representação diagramática, dois vetores possuem o mesmo módulo, mesma direção e mesmo sentido, mesmo que desenhados com diferentes pontos iniciais e finais (ver Fig. 1.2), então esses vetores são *iguais*.
- O vetor *menos*  $\mathbf{a}$ , denotado por  $-\mathbf{a}$ , representa um vetor de mesmo módulo e direção de  $\mathbf{a}$ , mas de sentido oposto. Esse vetor pode ser chamado de vetor *oposto* ao vetor  $\mathbf{a}$  (Fig. 1.3).
- Dois vetores são ditos *paralelos* caso possuam a mesma direção e sentido. Dois vetores são ditos *anti-paralelos* caso possuam mesma direção mas sentidos opostos.
- Podemos definir um *ângulo planar*  $\theta$  entre dois vetores não-nulos. Caso os dois vetores sejam paralelos,  $\theta = 0$ . Caso os dois vetores sejam anti-paralelos,  $\theta = \pi$ . Caso os dois vetores não sejam paralelos nem anti-paralelos, eles definem um plano. Sendo assim,  $\theta$  é o ângulo planar formado entre os dois vetores sobre esse plano, e o mesmo é sempre definido tal que  $0 \leq \theta \leq \pi$  (perceba que é sempre possível fazer isso).
- Há quatro operações algébricas básicas a serem estabelecidas;

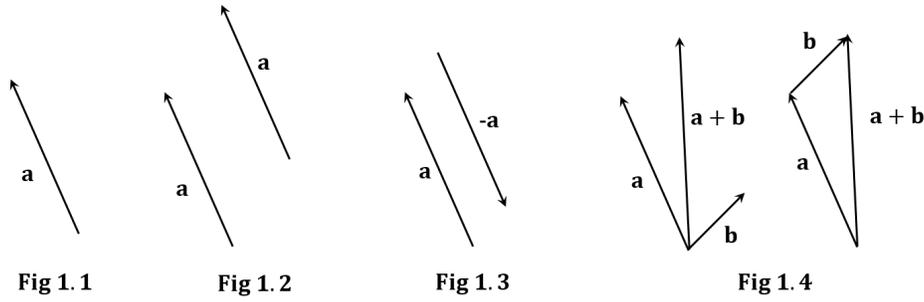


Fig 1.1

Fig 1.2

Fig 1.3

Fig 1.4

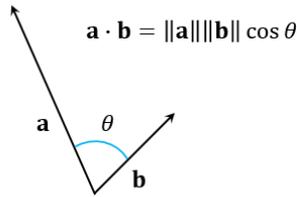


Fig 1.5

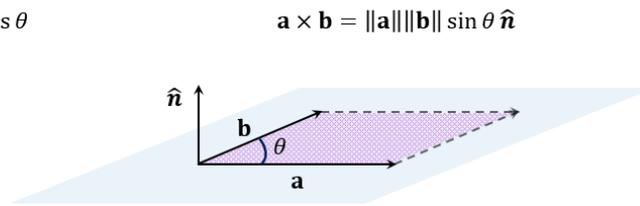


Fig 1.6

Figura 1.1: A Fig. 1.1 mostra uma representação diagramática de um vetor  $\mathbf{a}$  não-nulo. A Fig. 1.2 mostra duas representações de um mesmo vetor  $\mathbf{a}$ , reforçando que um vetor não possui um *início* ou *fim* bem definidos. A Fig. 1.3 mostra possíveis representações do vetor  $\mathbf{a}$  e do seu vetor oposto  $-\mathbf{a}$ , deixando claro que  $\|\mathbf{a}\| = \|-\mathbf{a}\|$ . A Fig. 1.4 mostra duas maneiras de representar a soma de dois vetores  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ . Fig. 1.5; produto escalar. Fig. 1.6; produto vetorial.

1. **Adição de vetores:** A operação de adição é definida como sendo do tipo  $+: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Diagramaticamente, o vetor soma, que resulta da adição entre  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  pode ser representado como mostrado na Fig. 1.4. A adição de vetores é uma operação comutativa, de sorte que, para quaisquer dois vetores  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ , temos que  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ . A operação também é associativa, de forma que  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$  para quaisquer três vetores  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}$ . A subtração entre dois vetores  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  pode ser definido com o uso da noção de vetor oposto. De fato, define-se que  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$  nada mais é do que  $\mathbf{a} + (-\mathbf{b})$ , em que  $-\mathbf{b}$  é o vetor oposto de  $\mathbf{b}$ . Note também que, qualquer que seja o vetor  $\mathbf{a}$ , temos que  $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$  e  $\mathbf{a} - \mathbf{a} = \mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ .
2. **Multiplicação por escalar:** Sendo  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $\mathbf{a}$  um vetor em  $\mathbb{R}^3$ , escreve-se  $\alpha\mathbf{a}$  para designar um outro vetor de  $\mathbb{R}^3$ , resultado do produto entre  $\alpha$  e  $\mathbf{a}$ . O vetor  $\alpha\mathbf{a}$  possui a mesma direção de  $\mathbf{a}$ , e sentido igual (oposto) caso  $\alpha$  seja positivo (negativo). Também vale que  $\|\alpha\mathbf{a}\| = |\alpha|\|\mathbf{a}\|$ . Em outras palavras, um dos efeitos da multiplicação de um vetor por um escalar é alterar sua magnitude sem alterar sua direção. Fica claro que a multiplicação de qualquer vetor por zero resulta no vetor nulo. Além disso, o vetor  $-\mathbf{a}$  é equivalente à multiplicação  $(-1)\mathbf{a}$ . A multiplicação por escalar é uma operação linear, tal que, para quaisquer  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  e  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ , temos que  $\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$  e

$$(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}.$$

3. **Produto escalar:** Sendo  $\theta$  o ângulo planar formado entre dois vetores  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ , como mostrado na Fig. 1.5, o produto escalar entre esses vetores é dado por

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| \cos \theta. \quad (1.1)$$

O produto escalar é uma quantidade escalar, como o próprio nome já diz, sendo este uma operação da forma  $\cdot : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ . Se os dois vetores são ortogonais ( $\theta = \pi/2$ ) o produto escalar entre eles é zero. Note que, como  $0 \leq \theta \leq \pi$ , o produto escalar pode assumir valores positivos e negativos, a depender do ângulo  $\theta$ . À título de exemplo, o produto escalar entre vetores paralelos é sempre positivo, enquanto que o produto escalar entre vetores anti-paralelos é sempre negativo. O produto escalar é uma operação linear, tal que, para quaisquer  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  e  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ , temos que  $\mathbf{c} \cdot (\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) = \alpha\mathbf{c} \cdot \mathbf{a} + \beta\mathbf{c} \cdot \mathbf{b}$ .

4. **Produto vetorial:** Diferente do produto escalar, o produto vetorial é um vetor, da forma  $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , dado por

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| \sin \theta \hat{\mathbf{n}}. \quad (1.2)$$

Na equação 1.2 o vetor  $\hat{\mathbf{n}}$  é unitário e perpendicular ao plano formado pelos vetores  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ , como mostra a Fig. 1.6. O sentido de  $\hat{\mathbf{n}}$  é estabelecido por convenção, para a qual frequentemente se introduz o que é conhecido como “regra da mão direita”. O sentido de  $\hat{\mathbf{n}}$  seria oposto caso o produto vetorial fosse tomado com os vetores na ordem inversa. Isto é,  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ . Esta anti-simetria implica imediatamente que o produto vetorial  $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$  para qualquer  $\mathbf{a}$ . Além disso, da expressão 1.2 podemos diretamente observar que o módulo do produto vetorial é  $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| \sin \theta$ , e equivale à área do paralelogramo hachurado na Fig. 1.6. Note que, como  $0 \leq \theta \leq \pi$ , o seno de  $\theta$  é sempre não-negativo e  $|\sin \theta| = \sin \theta$ . O produto vetorial entre dois vetores paralelos ou anti-paralelos é igual ao vetor nulo. O produto vetorial é uma operação linear, tal que, para quaisquer  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  e  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ , temos que  $\mathbf{c} \times (\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) = \alpha\mathbf{c} \times \mathbf{a} + \beta\mathbf{c} \times \mathbf{b}$ .

- Vetores são comumente utilizados para representar quantidades/grandezas físicas que, via de regra, possuem dimensão bem definida. Por exemplo, no Sistema Internacional (SI), um vetor representando uma posição está associado a unidades de comprimento (m). Da mesma forma, o módulo de um vetor tem as mesmas dimensões físicas do vetor ao qual está associado.
- Existe uma classe especial de vetores. Trata-se de vetores unitários adimensionais, no sentido de que não possuem uma dimensão física associada. Esses vetores são conhecidos como *versores*, e tipicamente usaremos a notação  $\hat{\mathbf{u}}$ , com um acento, para tipificar um versor,

apenas por conveniência. Por exemplo, sendo  $\mathbf{a}$  um vetor não-nulo, a quantidade

$$\hat{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} \quad (1.3)$$

é um versor, qualquer que seja a dimensão física associada ao vetor  $\mathbf{a}$ . Nesse exemplo, diz-se que  $\hat{\mathbf{a}}$  é o vetor  $\mathbf{a}$  *normalizado*. Ele tem a mesma direção e sentido de  $\mathbf{a}$  mas sem unidade de medida (mesmo que  $\mathbf{a}$  tenha alguma) e módulo igual a 1.

- Há uma conexão entre a função módulo - de um vetor - e a operação produto escalar. A saber, define-se

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}. \quad (1.4)$$

Podemos dizer que a função módulo (ou norma) que estamos atribuindo ao espaço  $\mathbf{R}^3$  *provém* da noção do produto escalar nesse espaço.

- No contexto desta disciplina, não apenas trataremos o  $\mathbf{R}^3$  como um espaço vetorial mas também como um espaço métrico; isto é, um conjunto dotado de uma métrica. Sem entrar muito em detalhes matemáticos, a métrica no  $\mathbf{R}^3$  é uma função do tipo  $\mathcal{D} : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}_+$  que carrega consigo uma interpretação de *distância* entre dois elementos de  $\mathbf{R}^3$ . Em outras palavras,  $\mathcal{D}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  será a nossa forma de denotar a distância entre os pontos no espaço tridimensional representados pelos vetores  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ . Particularmente no nosso caso, a métrica *provém* da função módulo e é dada por<sup>1</sup>

$$\mathcal{D}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\| = \sqrt{(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})}.$$

- Como um último comentário, sempre que estivermos lidando com vetores fica subentendido que se trata de vetores em  $\mathbf{R}^3$ , a menos que seja dito o contrário.

(1.a) Prove que, para quaisquer vetores  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ , vale que

$$\left| \|\mathbf{b}\| - \|\mathbf{a}\| \right| \leq \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|,$$

e use isso para provar que, para quaisquer vetores  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}$ , vale que

$$\mathcal{D}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) \leq \mathcal{D}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \mathcal{D}(\mathbf{b}, \mathbf{c}).$$

(1.b) Prove que o produto vetorial *não* é associativo em geral. Faça isso construindo um contra-exemplo em que  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$  não é igual à  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ .

---

<sup>1</sup>Esta definição respeita todos os requisitos exigidos por métricas, em geral, como (i)  $\mathcal{D}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \geq 0$ , (ii)  $\mathcal{D}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathcal{D}(\mathbf{b}, \mathbf{a})$ , (iii)  $\mathcal{D}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$  se, e somente se,  $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ , (iv)  $\mathcal{D}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) \leq \mathcal{D}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \mathcal{D}(\mathbf{b}, \mathbf{c})$ , válidas para quaisquer vetores  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}$  em  $\mathbf{R}^3$ .



## Seção 2

# Símbolos especiais

Há dois símbolos que representam funções especiais que serão úteis para análise vetorial e para manipulações gerais de expressões envolvendo campos vetoriais. O *delta de Kronecker*, denotado pela letra grega  $\delta$ , designa uma função especial definida para um par de inteiros não-negativos,  $i$  e  $j$ , da forma

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}, \quad (2.1)$$

No caso de vetores em  $\mathbb{R}^3$ , tipicamente  $i$  e  $j$  assumem os valores 1, 2 ou 3. Note, diretamente da definição 2.1, que  $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ .

(2.a) Sendo  $V$  uma matriz  $3 \times 1$  qualquer, com elementos da forma  $V_i$ , com  $i = 1, 2, 3$ , mostre que:

$$\delta_{ij}V_j = \delta_{ij}V_i.$$

(2.b) Sendo  $M$  uma matriz  $3 \times 3$  qualquer, com elementos da forma  $M_{ij}$ , com  $i, j = 1, 2, 3$ , mostre que:

$$\sum_{k=i}^3 \delta_{ik}M_{kl} = M_{il}.$$

O segundo objeto especial a ser definido é o *símbolo - ou tensor - de Levi-Civita*, denotado pela letra grega  $\epsilon$ . A *ordem* do símbolo de Levi-Civita representa o número de inteiros não-negativos sobre os quais o mesmo é definido. Em 3 dimensões, é conveniente trabalharmos com o símbolo de Levi-Civita de ordem 3, o qual denotamos por  $\epsilon_{ijk}$  e é definido como

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{se } (i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) \\ -1, & \text{se } (i, j, k) = (1, 3, 2), (3, 2, 1), (2, 1, 3) . \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.2)$$

Perceba que nessa situação não somente  $\epsilon$  é definido para um conjunto de 3 índices como, também,

cada um dos índices assume os valores 1, 2 ou 3. O símbolo de Levi-Civita reflete propriedades de simetria na permutação de seus índices. Ele assume o valor +1 quando os índices  $(i, j, k)$  valem  $(1, 2, 3)$  ou qualquer permutação cíclica desse conjunto. Por outro lado, ele assume o valor -1 quando os índices valem  $(3, 2, 1)$  ou qualquer permutação cíclica desses. As exceções a esses casos ocorrem, necessariamente, quando pelo menos dois dos índices assumem o mesmo valor. Nesses casos o símbolo assume o valor zero.

(2.c) Apenas convença-se de que  $\epsilon_{ijk} = \epsilon_{kij}$  e  $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik}$  para quaisquer  $i, j$  e  $k$ .

Há uma série de identidades que relacionam o símbolo de Levi-Civita com o delta de Kronecker. Por exemplo, é possível mostrar - por força bruta - que sempre vale a igualdade

$$\epsilon_{ijk} = \delta_{i1}\delta_{j2}\delta_{k3} + \delta_{i2}\delta_{j3}\delta_{k1} + \delta_{i3}\delta_{j1}\delta_{k2} - \delta_{i1}\delta_{j3}\delta_{k2} - \delta_{i3}\delta_{j2}\delta_{k1} - \delta_{i2}\delta_{j1}\delta_{k3} = \det \begin{pmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Não é necessário provar a equação acima, apenas tenha em mente que existem formas frequentemente úteis de relacionar os dois objetos.

As coisas se tornam um pouco mais complicadas quando lidamos com produtos de dois símbolos de Levi-Civita. Para finalizar esta seção, prove as propriedades abaixo:

(2.d)

$$\sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$$

(2.e)

$$\sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{ljk} = 2\delta_{il}$$

(2.f)

$$\sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{ijk} = 6$$

**Sugestão:** Uma maneira de provar a (2.d) é por força bruta; simplesmente liste todos os casos não-triviais possíveis. Em seguida, utilize a (2.d) para mostrar a (2.e) e utilize a (2.e) para mostrar a (2.f).

## Seção 3

# Coordenadas cartesianas e componentes de vetores em $\mathbb{R}^3$

Na prática, a manipulação de vetores requer sua representação em uma base, e uma maneira natural de fazê-lo é utilizando o sistema de coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$ . Dadas circunstâncias, a origem e orientação dos eixos cartesianos é definida a depender da conveniência. Define-se versores especiais  $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ , cujas direções e sentidos respeitam, respectivamente, as direções e orientações adotadas para os eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Esses versores também são conhecidos como *vetores de base*, ou até *versores de base*. Sendo os eixos perpendiculares entre si, os vetores de base são ortogonais dois a dois, isto é,  $\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{i} \cdot \hat{k} = 0$ . Além disso, sendo os vetores de base versores,  $\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$ . Vetores unitários e ortogonais também são ditos *ortonormais*, de forma que podemos dizer que  $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$  é um conjunto ortonormal.

Uma forma de renomear o conjunto de coordenadas cartesianas é utilizando a notação  $(x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$ , em que, naturalmente,  $x \rightarrow x_1$ ,  $y \rightarrow x_2$  e  $z \rightarrow x_3$ . De maneira similar, usa-se a notação  $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$  para renomear os versores de base  $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ . As relações de ortonormalidade entre os vetores de base podem ser sinteticamente traduzidas por  $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}$ . Essa nomenclatura se mostra conveniente, por exemplo, para expressarmos um vetor qualquer  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$  em termos de suas *componentes* como

$$\mathbf{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k} = \sum_{i=1}^3 a_i \hat{e}_i, \quad (3.1)$$

em que  $a_x$  (ou  $a_1$ ),  $a_y$  (ou  $a_2$ ) e  $a_z$  (ou  $a_3$ ) são as componentes cartesianas do vetor  $\mathbf{a}$ . Subentende-se que lidamos com uma base *destrógi* - que é equivalente a dizer que os elementos do conjunto  $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$  formam uma base *orientada positivamente*. Isso significa que os produtos vetoriais entres os versores seguem as regras:

- $\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = -\hat{e}_2 \times \hat{e}_1 = \hat{e}_3$
- $\hat{e}_3 \times \hat{e}_1 = -\hat{e}_1 \times \hat{e}_3 = \hat{e}_2$
- $\hat{e}_2 \times \hat{e}_3 = -\hat{e}_3 \times \hat{e}_2 = \hat{e}_1$

Em termos de suas componentes, o módulo de um vetor  $\mathbf{a}$  pode ser escrito como

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \left[ \sum_{i,j=1}^3 a_i a_j \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j \right]^{1/2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (3.2)$$

Adicionalmente, um vetor é o vetor nulo se, e somente se, tem suas três componentes nulas. Uma consequência disso é que, dois vetores  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  são iguais se, e somente se, suas componentes cartesianas são iguais uma a uma. De fato,  $\mathbf{a} = \mathbf{b}$  implica que  $a_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + a_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + a_3 \hat{\mathbf{e}}_3 = b_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + b_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + b_3 \hat{\mathbf{e}}_3$ , que por sua vez implica que

$$(a_1 - b_1) \hat{\mathbf{e}}_1 + (a_2 - b_2) \hat{\mathbf{e}}_2 + (a_3 - b_3) \hat{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{0}.$$

Porém, uma vez que um vetor é igual ao vetor nulo se, e somente se, cada uma de suas componentes é nula, concluímos que  $a_1 = b_1$ ,  $a_2 = b_2$  e  $a_3 = b_3$ .

O próximo passo é escrever as quatro operações algébricas definidas na seção 1 em termos das componentes dos vetores envolvidos. A primeira delas é a soma de vetores. Sendo  $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ , temos que

$$\begin{aligned} c_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + c_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + c_3 \hat{\mathbf{e}}_3 &= (a_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + a_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + a_3 \hat{\mathbf{e}}_3) + (b_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + b_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + b_3 \hat{\mathbf{e}}_3) \\ c_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + c_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + c_3 \hat{\mathbf{e}}_3 &= (a_1 + b_1) \hat{\mathbf{e}}_1 + (a_2 + b_2) \hat{\mathbf{e}}_2 + (a_3 + b_3) \hat{\mathbf{e}}_3. \end{aligned}$$

Dessa forma,  $c_1 = a_1 + b_1$ ,  $c_2 = a_2 + b_2$  e  $c_3 = a_3 + b_3$ .

Sobre a multiplicação por escalar, temos que se  $\mathbf{v} = \alpha \mathbf{u}$ , para qualquer  $\alpha \in \mathbb{R}$ , então

$$v_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + v_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + v_3 \hat{\mathbf{e}}_3 = \alpha(u_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + u_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + u_3 \hat{\mathbf{e}}_3) = \alpha u_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + \alpha u_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + \alpha u_3 \hat{\mathbf{e}}_3,$$

o que implica que  $v_1 = \alpha u_1$ ,  $v_2 = \alpha u_2$  e  $v_3 = \alpha u_3$ . Como um exemplo, o vetor oposto a um vetor  $\mathbf{v}$  é dado por  $-\mathbf{v} = (-1)\mathbf{v} = -(v_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + v_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + v_3 \hat{\mathbf{e}}_3) = -v_1 \hat{\mathbf{e}}_1 - v_2 \hat{\mathbf{e}}_2 - v_3 \hat{\mathbf{e}}_3$ . Dessa forma, a subtração entre dois vetores pode ser expressa como

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = (a_1 - b_1) \hat{\mathbf{e}}_1 + (a_2 - b_2) \hat{\mathbf{e}}_2 + (a_3 - b_3) \hat{\mathbf{e}}_3.$$

Ainda nesse contexto, uma importante expressão que frequentemente aparece nas expressões ao longo do curso é a do tipo  $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$ , que em termos das componentes de  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  é dada por

$$\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}.$$

A próxima operação é o produto escalar. O produto escalar entre dois vetores  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  pode ser escrito como

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i,j=1}^3 a_i b_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^3 a_i b_i, \quad (3.3)$$

donde percebemos imediatamente que  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ . É fácil ver a linearidade do produto escalar a

partir da expressão 3.3, isto é, que  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ . Ou também que, por exemplo, para qualquer  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $(\alpha \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\alpha \mathbf{b}) = \alpha(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ .

O produto vetorial, por fim, pode ser expresso por vias de um determinante entre as componentes dos vetores envolvidos,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \det \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 & \hat{\mathbf{e}}_2 & \hat{\mathbf{e}}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

O fato de que o determinante de uma matriz muda de sinal ao invertermos duas de suas linhas nos faz perceber, diretamente da equação 3.4, que  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ , propriedade do produto vetorial que já havia sido discutida na seção 1. Por fim, a  $i$ -ésima componente do produto vetorial  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  pode ser convenientemente escrita com o uso o símbolo de Levi-Civita, como (cheque esta afirmação!)

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} a_j b_k. \quad (3.5)$$

Como no produto escalar, é fácil de notar diretamente da equação 3.5 que o produto vetorial é linear, isto é,  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ . Ou também que, por exemplo, para qualquer  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $(\alpha \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\alpha \mathbf{b}) = \alpha(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ .

Utilize as equações 3.1, 3.3 e 3.5 para provar as identidades abaixo, onde  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  e  $\mathbf{d}$  são vetores quaisquer em  $\mathbb{R}^3$ .

$$(3.a) \quad \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

$$(3.b) \quad \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

$$(3.c) \quad \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$$

$$(3.d) \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$$

**Sugestão:** Utilize a (2.d) para provar a (3.b) e a (3.d). Para provar a (3.c), também conhecida como *identidade de Jacobi*, utilize diretamente a (3.b).



## Seção 4

# O vetor posição

Um *vetor posição* representa a localização de um ponto em  $\mathbb{R}^3$ , dado um sistema de coordenadas. Um ponto  $P$  é um conjunto de três coordenadas  $P = (x, y, z)$ , ou  $P = (x_1, x_2, x_3)$ . Duas notações serão utilizadas ao longo do curso para designar o vetor posição, e elas são equivalentes, sendo uma delas baseada no símbolo  $\mathbf{r}$  e a outra no símbolo  $\mathbf{x}$ . A escolha por uma notação ou outra é arbitrária, e dependerá da conveniência. Note, no entanto, que na notação do texto *Introduction to Electrodynamics*, do D. Griffiths, a notação baseada no símbolo  $\mathbf{r}$  é a mais utilizada, enquanto que no texto *Classical Electrodynamics*, do J. Jackson, a notação  $\mathbf{x}$  é a utilizada. Em termos das coordenadas, podemos escrever

$$\mathbf{x} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = \sum_{i=1}^3 x_i\hat{e}_i. \quad (4.1)$$

O módulo do vetor posição será denotado por  $r$ , de forma que as identificações  $r = \|\mathbf{r}\|$  e  $r = \|\mathbf{x}\|$  são equivalentes. Naturalmente,

$$r = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (4.2)$$

No Eletromagnetismo, frequentemente lidamos com a interação entre duas cargas ou entre dois pontos. Por exemplo, em contextos onde devemos encontrar o campo magnético ou o potencial elétrico em um certo ponto localizado em  $\mathbf{x}$ , a entidade física que está *gerando* esse campo - como correntes ou cargas elétricas - via de regra se encontra localizada em *outro* ponto (ou em um conjunto de vários outros pontos). Os principais problemas, principalmente nos contextos de Eletrostática e Magnetostática, tratam de encontrar expressões para campos em um *ponto de observação*  $P = \mathbf{x}$  devido a uma *fonte* localizada em um segundo ponto, usualmente denotado por  $P' = \mathbf{x}'$  (Fig. 2). Seguindo a mesma notação, escreve-se as coordenadas do vetor  $\mathbf{x}'$  como  $(x', y', z')$ , ou também como  $(x'_1, x'_2, x'_3)$ . Assim se mostra conveniente definir o vetor *deslocamento* (ou vetor *separação*), que é entendido como a diferença  $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ , cuja direção coincide com a reta que une os dois pontos e o sentido é de  $\mathbf{x}'$  para  $\mathbf{x}$ . Em termos das coordenadas,

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}' = (x - x')\hat{i} + (y - y')\hat{j} + (z - z')\hat{k}. \quad (4.3)$$

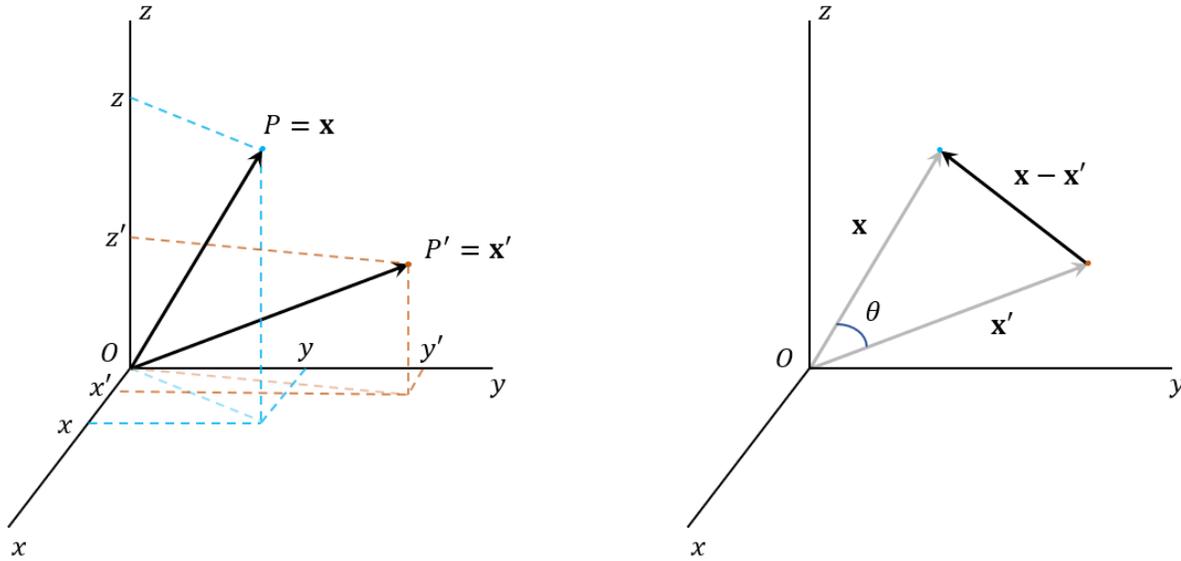


Figura 4.1: Na figura à esquerda estão dispostos genericamente os vetores posição  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x}'$ , onde explicito suas coordenadas cartesianas. Na figura à direita mostro os mesmos vetores  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x}'$ , mas agora indicando o vetor deslocamento  $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ . Na figura à direita também está o ângulo planar  $\theta$  entre  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x}'$ , definido sobre o plano formado pelos mesmos. A origem do sistemas de coordenadas é indicado por  $O$ .

Finalmente, o módulo do vetor deslocamento é

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| = \sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2},$$

que, por definição, equivale à  $\mathcal{D}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ . Uma outra forma de expressar o módulo do vetor deslocamento é

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}' - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'} = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta},$$

em que  $r' = \|\mathbf{x}'\|$  e  $\theta$  é o ângulo planar entre os vetores  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x}'$  (ver Fig. 2 à direita). Repare que essa última forma é nada mais do que uma aplicação da conhecida Lei dos cossenos sobre o triângulo  $\Delta OPP'$ , em que  $O$  representa a origem do sistema de coordenadas. Diga-se de passagem, o vetor posição associado ao ponto  $O$  é naturalmente o vetor nulo, de sorte que  $\mathcal{D}(\mathbf{x}, O) = \mathcal{D}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = \|\mathbf{x}\|$ . Ademais, a normalização do vetor deslocamento fornece o versor

$$\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} = \frac{(x - x')\hat{i} + (y - y')\hat{j} + (z - z')\hat{k}}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}},$$

que é de extrema importância no Eletromagnetismo.

Como você verá nos próximos capítulos, em muitos casos estudaremos ocasiões onde o ponto de observação se distancia consideravelmente do ponto onde a fonte se localiza, ou seja,  $\|\mathbf{x}\| \gg \|\mathbf{x}'\|$ . Uma aproximação extremamente útil que pode ser feita nessa condição para o vetor deslocamento

é

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| \approx \|\mathbf{x}\| \left( 1 - \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'}{\|\mathbf{x}\|^2} \right) = \|\mathbf{x}\| - \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x}', \quad (4.4)$$

onde, na última passagem, utilizamos o versor

$$\hat{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}.$$

(4.a) Interprete geometricamente a aproximação 4.4.

## Leis de transformação e uma definição mais formal de vetores

Há um último comentário a ser feito antes de seguirmos adiante. Este comentário tem como objetivo fornecer uma noção um pouco mais geral - por assim dizer - de vetores. A ideia se baseia especificamente no vetor posição como referência. As coordenadas do vetor posição dependem de como você estabelece o sistema de coordenadas. O posicionamento da origem e a direção/orientação dos eixos claramente impacta o valor das componentes de um vetor posição. Em mais detalhes, suponha que haja um sistema de coordenadas sob o qual o vetor posição tenha componentes  $(x, y, z)$  - ou mesmo  $(x_1, x_2, x_3)$ . Sob um segundo sistema de coordenadas, o vetor posição assume outras componentes  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  - ou mesmo  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ . Uma vez que dois sistemas de coordenadas diferem, em geral, de uma translação da origem sobreposta a uma rotação relativa entre seus eixos, devemos ser capazes de relacionar as componentes  $(x, y, z) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  caso saibamos como esses sistemas diferem. Quando os dois sistemas de coordenadas diferem apenas por uma translação, as coordenadas do vetor posição  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  são iguais às coordenadas  $(x, y, z)$  subtraído das coordenadas do vetor posição da origem do segundo sistema de coordenadas, medido a partir do primeiro. No entanto, transformação associadas a translações são pouco importantes para o comentário que estou apresentando, e nos concentraremos exclusivamente em transformações onde os dois sistemas de coordenadas compartilham a origem mas diferem por uma rotação relativa entre seus eixos. Daqui em diante, ao me referir a uma transformação, devemos subentender que me refiro a uma rotação. Nesse caso podemos escrever, em geral, a relação

$$\bar{x}_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij} x_j, \quad (4.5)$$

onde podemos entender os fatores  $R_{ij}$ , com  $i, j = 1, 2, 3$ , como elementos de uma *matriz de rotação* ( $3 \times 3$ ). Toda informação a respeito das direções/orientações relativas entre os eixos, fica codificada nessa matriz. Não entraremos em detalhes acerca de como os elementos da matriz de rotação são obtidos. Mas você fica convidada(o) a ler (i) a seção 1.1.5, cap. 1, do texto *Introduction to Electrodynamics* (D. Griffiths) e (ii) o capítulo 11 do texto *The Feynman Lectures on Physics, vol. I* (R. Feynman, *et al.*).

A partir da Lei de transformação 4.5, válida para vetores posição, podemos escrever que as

coordenadas de *qualquer* vetor  $\mathbf{v}$  se transformam de um sistema de coordenadas para outro segundo

$$\bar{v}_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij} v_j, \quad (4.6)$$

em que as quantidades  $R_{ij}$  são as mesmas que transformam o vetor posição entre esses mesmos dois sistemas de coordenadas. Mais do que isso, podemos extrapolar essa ideia e *definir* um vetor como sendo qualquer elemento de  $\mathbb{R}^3$  que se transforma, entre dois sistemas de coordenadas, da mesma forma como o vetor posição se transformaria. Essa definição é bastante útil, e é usada para mostrar, por exemplo, que o *gradiente* - de um campo escalar (ver as próximas seções) - é um vetor de fato.

## Seção 5

# Campos

Estamos agora em condições de definir um dos objetos mais centrais do Eletromagnetismo Clássico. Um *campo* - no espaço tridimensional - é uma *função* cujo domínio é um subconjunto do  $\mathbb{R}^3$ . Assim, podemos dizer que um campo é uma função avaliada dado um vetor posição. Ou, em outras palavras, que retorna uma quantidade para cada vetor  $\mathbf{x}$ . Vale a pena chamar a atenção para o termo “subconjunto” aqui. Muitas vezes trabalharemos com situações em que há pontos no espaço onde os campos de interesse não são bem definidos. Por exemplo, em problemas de Eletrostática envolvendo cargas pontuais, o campo elétrico não é bem definido nas posições onde as cargas pontuais estão localizadas. Claro que há circunstâncias onde os campos são perfeitamente definidos em todo o espaço, mas note que tais casos estão contemplados nessa construção, posto que o  $\mathbb{R}^3$  é um subconjunto de  $\mathbb{R}^3$ , por definição.

É importante classificar os campos em dois tipos. Os *campos escalares* são funções do tipo  $\Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , que associam uma quantidade escalar a cada ponto  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Muitas grandezas de interesse físico podem ser entendidas como campos escalares como, por exemplo, a temperatura em cada ponto  $\mathbf{x}$  de uma sala, que poderíamos denotar por, digamos,  $T(\mathbf{x})$ . Escrever  $T(\mathbf{x})$  é o mesmo que escrever  $T(x, y, z)$ . Nesse exemplo, os pontos da sala onde a temperatura está definida constituem o conjunto que chamei de  $\Omega$ . Um outro exemplo, este particularmente útil no Eletromagnetismo, é o potencial elétrico, usualmente denotado por  $\phi(\mathbf{x})$  ou  $V(\mathbf{x})$ . Por outro lado, os *campos vetoriais* são funções do tipo  $\Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , que associam um vetor a cada ponto  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Em outras palavras, um campo vetorial é uma função que retorna um vetor para cada ponto  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Faço questão de ressaltar a importância de não perder de vista todas as definições e propriedades atribuídas a vetores apresentadas até aqui. Exemplos interessantes de campos vetoriais são os próprios campos elétricos e magnéticos, que denotamos por  $\mathbf{E}(\mathbf{x})$  e  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ , respectivamente.

Sendo  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  um campo vetorial qualquer, uma forma de escrevê-lo em termos de suas componentes é

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = v_1(\mathbf{x})\hat{\mathbf{e}}_1 + v_2(\mathbf{x})\hat{\mathbf{e}}_2 + v_3(\mathbf{x})\hat{\mathbf{e}}_3, \quad (5.1)$$

que é o mesmo que escrever

$$\mathbf{v}(x, y, z) = v_1(x, y, z)\hat{\mathbf{e}}_1 + v_2(x, y, z)\hat{\mathbf{e}}_2 + v_3(x, y, z)\hat{\mathbf{e}}_3. \quad (5.2)$$

Ou seja, em termos gerais, cada componente  $v_i$  pode depender de  $\mathbf{x}$ . Na verdade, podemos dizer que cada uma das três componentes de um campo vetorial é um campo escalar, todas definidas sobre o mesmo domínio. As equações 5.1 e 5.2 representam as formas mais gerais de um campo vetorial em termos de componentes cartesianas. Note que o próprio vetor posição por si só pode ser entendido como um campo vetorial, pois é da forma 5.2, com  $v_1(x, y, z) = x$ ,  $v_2(x, y, z) = y$  e  $v_3(x, y, z) = z$ .

É fácil mostrar, a partir das operações básicas da álgebra vetorial, que a multiplicação entre um campo escalar  $\phi(\mathbf{x})$  e um campo vetorial  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  é o *campo vetorial*  $\phi(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x})$ . Da mesma forma, sendo  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  dois campos vetoriais, o produto escalar  $\mathbf{a}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{b}(\mathbf{x})$  é um *campo escalar*, enquanto que o produto vetorial  $\mathbf{a}(\mathbf{x}) \times \mathbf{b}(\mathbf{x})$  é um campo vetorial. Essas noções serão fundamentais para que você não se perca nos problemas das próximas seções.

(5.a) Sendo  $\phi(\mathbf{x})$  um campo escalar e  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  e  $\mathbf{b}(\mathbf{x})$  campos vetoriais quaisquer, expresse os campos vetoriais  $\phi(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x})$  e  $\mathbf{a}(\mathbf{x}) \times \mathbf{b}(\mathbf{x})$  em termos de suas componentes cartesianas.

## O tempo como variável independente

Claro que problemas de Física podem tratar de objetos cujas propriedades variam no tempo. Em particular, campos - sejam escalares ou vetoriais - podem variar no tempo a depender da situação. Em casos como esses os campos são funções *distintas* de  $\mathbf{x}$  para cada instante  $t$ . Na notação usual, um campo escalar  $\phi$  que depende do tempo é da forma  $\phi = \phi(\mathbf{x}, t)$ . No exemplo da temperatura em uma sala, não é difícil imaginar que, em situações um pouco menos idealizadas, o valor da temperatura pode variar no tempo em cada ponto do espaço. Ou, ainda mesmo, que em dois instantes de tempo diferentes e fixos - digamos,  $t_1$  e  $t_2$  - as temperaturas  $T(\mathbf{x}, t = t_1)$  e  $T(\mathbf{x}, t = t_2)$  sejam funções completamente diferentes da variável  $\mathbf{x}$ .

Um campo escalar dependente do tempo é portanto da forma  $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , em que  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$  representa o conjunto (*posição*) $\times$ (*tempo*), por sua vez denotado simplesmente por  $\mathbb{R}^4$  em diversos contextos. Similarmente, um campo vetorial é da forma  $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , e tem a forma geral análoga à expressão 5.1,

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = v_1(\mathbf{x}, t)\hat{\mathbf{e}}_1 + v_2(\mathbf{x}, t)\hat{\mathbf{e}}_2 + v_3(\mathbf{x}, t)\hat{\mathbf{e}}_3,$$

e, ainda de forma análoga, podemos dizer que cada uma das três componentes de um campo vetorial dependente do tempo é um campo escalar dependente do tempo.

A dependência temporal dos campos elétrico e magnético, assim como de suas fontes, é uma das características que dividem o estudo do Eletromagnetismo. Quando cargas e correntes não se alteram no tempo, e conseqüentemente os campos elétricos e magnéticos também não, o Eletromagnetismo se reduz ao estudo da Eletrostática e da Magnetostática, que serão os tópicos dos blocos 1 e 2 desta disciplina. Se as fontes e campos dependem do tempo, tal que  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$  e  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ , estaremos no reino da Eletrodinâmica, que envolve fenômenos como a Lei de Indução e ondas eletromagnéticas, por exemplo. A Eletrodinâmica será assunto do bloco 3. Você não precisará se preocupar com campos dependentes do tempo num primeiro momento, dessa forma

vamos nos concentrar por enquanto em casos estáticos. Assim, daqui em diante, a menos que esteja explicitado, o termo *campo escalar*  $\phi$  estará automaticamente se referindo a um objeto do tipo  $\phi : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , e o termo *campo vetorial*  $\mathbf{v}$  a um objeto do tipo  $\mathbf{v} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ .



## Seção 6

# Algumas propriedades do cálculo diferencial

Na seção 1 disse que partiria do pressuposto que algumas das noções envolvendo vetores seriam familiares para você. O mesmo assumirei com relação a tópicos básicos do cálculo diferencial e integral como limites, regras básicas de derivação e integração envolvendo funções de uma, duas e três variáveis. As definições e propriedades discutidas nesta e na próxima seção podem funcionar como uma recordação. No entanto, o maior objetivo é de que sirvam tanto como uma espécie de aquecimento para o curso quanto como um formulário para consultas futuras. Começemos pelas derivadas.

Na seção 4 definimos o vetor deslocamento como a subtração de dois vetores posição. Vamos estudar o caso em que esses dois vetores diferem de um deslocamento infinitesimal, isto é, um vetor posição de coordenadas  $(x, y, z)$  e um outro vetor de coordenadas  $(x + dx, y + dy, z + dz)$ . O vetor deslocamento infinitesimal  $d\mathbf{l}$  é definido como sendo a diferença entre esses dois vetores, ou seja,

$$d\mathbf{l} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}. \quad (6.1)$$

Não somente o vetor deslocamento infinitesimal será útil para integrais ao longo de curvas no espaço tridimensional, mas também, como você poderá apreciar na última seção destas notas, a estrutura da equação 6.1 é crucial para definirmos operadores diferenciais em sistemas de coordenadas curvilíneas (como coordenadas cilíndricas e esféricas, ver seção 8). Repare que não falamos disso até o momento.

### O operador $\nabla$ e derivadas de primeira ordem

Um campo escalar derivável  $\phi$  depende dos valores das coordenadas  $x, y$  e  $z$ . Estudar a variação de  $\phi$  em relação a variações infinitesimais de uma das coordenadas é diferente de estudá-la em relação a variações de outra coordenada. De fato, da teoria de derivadas parciais e diferenciais exatas,

temos que uma diferencial de  $\phi$  pode ser escrita como

$$d\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right) dz. \quad (6.2)$$

As equações 6.1 e 6.2 podem ser combinadas de forma a reescrever  $d\phi$  como um produto escalar da forma

$$d\phi = \nabla\phi \cdot d\mathbf{l}, \quad (6.3)$$

onde  $\nabla$  é um operador diferencial tal que

$$\nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{k}\right) \quad (6.4)$$

é o *gradiente* do campo  $\phi$ , resultado da ação desse operador sobre  $\phi$ . Note que, assim como o próprio campo  $\phi$ , cada uma das três derivadas parciais  $\partial\phi/\partial x$ ,  $\partial\phi/\partial y$  e  $\partial\phi/\partial z$  são funções que em geral também dependem de  $\mathbf{x}$ . Logo, esses três objetos também são campos escalares, e a equação 6.4 é da forma 5.1 ou 5.2. Em suma, a ação do objeto

$$\nabla = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right), \quad (6.5)$$

assim definido, resulta em um *campo vetorial* ao atuar sobre um *campo escalar*, e esta é a noção de gradiente. **Não existe a noção de gradiente de um campo vetorial.** Pense sobre isso e cuidado para não cometer imprecisões.

Na notação introduzida na seção 3, a equação 6.4 pode ser reescrita como

$$\nabla\phi = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial\phi}{\partial x_i} \hat{\mathbf{e}}_i, \quad (6.6)$$

ou ainda, para a  $i$ -ésima componente do vetor  $\nabla\phi$ , escreve-se

$$(\nabla\phi)_i = \frac{\partial\phi}{\partial x_i}. \quad (6.7)$$

Essas formas serão úteis para os exercícios desta seção.

Sob muitos aspectos, o operador  $\nabla$  deve por si só ser entendido como um vetor. Observe a definição 6.5. Porém, a ideia de que o gradiente de um campo escalar é um vetor, formalmente falando, não é exatamente óbvia. Na verdade, alguns textos da literatura dedicam algumas palavras para mostrar que o gradiente é de fato um vetor pois, sob rotações gerais do sistema de coordenadas, ele se transforma da mesma forma que o vetor posição. Como uma tarefa de leitura a respeito desse ponto, leia a seção 2-3, cap. 2, do texto *The Feynman Lectures on Physics, vol. II*. Você também fica convidada(o) a resolver o Problema 1.14 do cap. 1 do livro *Introduction to Electrodynamics*, do D. Griffiths.

Agora, sobre campos vetoriais, definimos duas possíveis ações do operador  $\nabla$ . O *divergente* é

definido para um campo vetorial derivável  $\mathbf{v}$  como sendo

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \left( \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}) = \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right), \quad (6.8)$$

que sob a notação introduzida na seção 3 é reescrito como

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_i}. \quad (6.9)$$

Em outras palavras, o divergente é o resultado de uma operação de produto escalar entre o operador  $\nabla$  e o campo vetorial. Ao contrário do gradiente (de um campo escalar, necessariamente), o divergente (de um campo vetorial, necessariamente) não é um vetor. As três derivadas  $\partial v_1/\partial x_1$ ,  $\partial v_2/\partial x_2$  e  $\partial v_3/\partial x_3$  são campos escalares e o divergente é simplesmente a soma simples desses campos. Repare que cada uma das componentes cartesianas  $v_i$  é uma função de  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$ , no entanto, para o cálculo do divergente, a  $i$ -ésima componente de  $\mathbf{v}$  é derivada apenas em relação a mesma  $i$ -ésima componente de  $\mathbf{x}$ . Por fim, o *rotacional* é definido para um campo vetorial derivável  $\mathbf{v}$  como sendo

$$\nabla \times \mathbf{v} = \det \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 & \hat{\mathbf{e}}_2 & \hat{\mathbf{e}}_3 \\ \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) \hat{\mathbf{e}}_1 + \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \hat{\mathbf{e}}_2 + \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \hat{\mathbf{e}}_3. \quad (6.10)$$

O rotacional é uma operação de produto vetorial entre o operador  $\nabla$  e o campo vetorial. O determinante aparece no cálculo do rotacional devido a estrutura do produto vetorial 3.4. Deve ser claro a partir da definição que rotacional é um campo vetorial. O mesmo comentário que fiz a respeito do gradiente ser, formalmente, um vetor também é válido para o rotacional. Inspirado pela equação 3.5, podemos escrever o rotacional na forma (convença-se que isso é equivalente à definição 6.10)

$$\nabla \times \mathbf{v} = \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \hat{\mathbf{e}}_i, \quad (6.11)$$

de sorte que somente sua  $i$ -ésima componente é da forma

$$(\nabla \times \mathbf{v})_i = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j}, \quad (6.12)$$

que, por ser uma componente, constitui um campo escalar. As três primeiras linhas da Tab. 6.1 resumem a natureza vetorial das ações de primeira ordem do operador  $\nabla$ .

Há um conjunto de interpretações operacionais e geométricas do gradiente, do divergente e do rotacional. O gradiente de um campo escalar, avaliado em um ponto  $\mathbf{x}$ , fornece a direção e sentido em que a derivada é maximizada - seu módulo avaliado nesse ponto fornece a taxa de variação do campo associada a essa direção e sentido. Além disso, o gradiente é utilizado no

Tabela 6.1: Natureza vetorial de operações envolvendo  $\nabla$ . Na última coluna,  $\phi$  e  $\mathbf{v}$  representam genericamente campos escalares e vetoriais, ambos diferenciáveis. No caso das duas últimas linhas, em particular, os campos devem ser duas vezes diferenciáveis.

operação	sobre	resultado	notação
gradiente	escalar	vetor	$\nabla\phi$
divergente	vetor	escalar	$\nabla \cdot \mathbf{v}$
rotacional	vetor	vetor	$\nabla \times \mathbf{v}$
laplaciano	escalar	escalar	$\nabla^2\phi$
	vetor	vetor	$\nabla^2\mathbf{v}$

estudo de máximos e mínimos de uma função escalar. O divergente e o rotacional, por outro lado, representam aspectos geométricos dos campos interessantes para o Eletromagnetismo. A saber, o divergente nos proporciona uma maneira de estudar *fontes* e/ou *sorvedouros* do campo vetorial. Por sua vez o rotacional está relacionado a uma tendência espacial que o campo vetorial tem de *girar* no ponto onde está sendo avaliado. Leia as seções 1.2.3 a 1.2.5, cap. 1, do texto *Introduction to Electrodynamics*, do D. Griffiths, para outros detalhes a respeito de interpretações geométricas.

Existe ainda uma quarta operação importante envolvendo o operador  $\nabla$  no contexto de derivadas de primeira ordem. Essa operação depende a priori de um campo vetorial - vamos chamá-lo de  $\mathbf{u}$  - e é da forma  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)$ . Em termos de componentes, escreve-se

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) = \left( u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} + u_z \frac{\partial}{\partial z} \right) = \sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (6.13)$$

Operadores desse tipo aparecem não apenas em equações do Eletromagnetismo mas também são importantes em Mecânica, Mecânica dos Fluidos, Física dos Plasmas, entre outros. Diferente de  $\nabla$ , esse operador não possui uma natureza vetorial, e portanto pode atuar tanto sobre um campo escalar quando sobre um campo vetorial, resultando num campo escalar no primeiro caso e num campo vetorial no segundo. Atuando sobre um campo escalar  $\phi$ , obtemos

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\phi = \left( u_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + u_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + u_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = \mathbf{u} \cdot (\nabla\phi). \quad (6.14)$$

Ou seja, é simplesmente o produto escalar entre  $\mathbf{u}$  e o gradiente de  $\phi$ , e não parece haver muita novidade. Entretanto, as coisas ficam um pouco diferentes quando atuamos esse operador em um

campo vetorial  $\mathbf{v}$ . Nesse camos temos

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v} &= \left( u_x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + u_y \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + u_z \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \right) = \hat{i} \left( u_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) + \\
 &+ \hat{j} \left( u_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + \hat{k} \left( u_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \quad (6.15) \\
 &= \sum_{i,j=1}^3 u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \hat{\mathbf{e}}_i = \sum_{i=1}^3 [\mathbf{u} \cdot (\nabla v_i)] \hat{\mathbf{e}}_i.
 \end{aligned}$$

Essa operação aparece nas identidades (6.d) e (6.f), que você provará abaixo.

Prove as identidades abaixo, envolvendo gradientes, divergentes e/ou rotacionais de campos compostos por produtos de dois campos. As funções  $\psi$  e  $\phi$  designam campos escalares diferenciáveis enquanto  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  designam campos vetoriais, também diferenciáveis. Antes de trabalhar nas igualdades, entenda se o lado esquerdo se refere a um gradiente, a um divergente ou a um rotacional, e nunca perca de vista se a igualdade se dá entre dois vetores ou dois escalares.

$$(6.a) \quad \nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$$

$$(6.b) \quad \nabla \cdot (\phi\mathbf{a}) = \phi(\nabla \cdot \mathbf{a}) + \mathbf{a} \cdot (\nabla\phi)$$

$$(6.c) \quad \nabla \times (\phi\mathbf{a}) = \phi(\nabla \times \mathbf{a}) + (\nabla\phi) \times \mathbf{a}$$

$$(6.d) \quad \nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a}) + (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a}$$

$$(6.e) \quad \nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b})$$

$$(6.f) \quad \nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + (\nabla \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} - (\nabla \cdot \mathbf{a})\mathbf{b}$$

Para cada uma das identidades acima, observe como o membro do lado direito pode ser reescrito, ou reduzido, caso um dos dois campos envolvidos seja um campo constante. Particularmente para (6.b) e (6.c), analise tanto o caso  $\phi$  constante como  $\mathbf{a}$  constante. Note que, uma vez que o produto escalar é comutativo, basta estudar o caso  $\mathbf{a}$  constante na identidade (6.d). Além disso, dado que  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ , o caso  $\mathbf{a}$  constante é análogo ao caso  $\mathbf{b}$  constante nas identidades (6.e) e (6.f), a menos de um sinal.

## Derivadas de segunda ordem

Além de derivadas de primeira ordem, as equações com as quais trabalharemos também podem envolver segundas derivadas dos campos. Há casos onde isso significa uma ação dupla do operador  $\nabla$ . Por exemplo, como o gradiente de um campo escalar é um campo vetorial, poderíamos calcular o divergente e/ou o rotacional desse gradiente. Ou também, digamos, o gradiente de um divergente. De fato, sendo  $\phi$  um campo escalar e  $\mathbf{v}$  um campo vetorial, temos de imediato cinco combinações de possíveis ações duplas de  $\nabla$ :

- $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v})$
- $\nabla \cdot (\nabla \phi)$
- $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v})$
- $\nabla \times (\nabla \phi)$
- $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v})$

Porém, dessas cinco, duas são **extremamente importantes** e resultam em campos identicamente nulos. De fato, prove as identidades abaixo diretamente a partir das equações 6.6, 6.7, 6.9, 6.11 e 6.12.

$$(6.g) \quad \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = 0$$

$$(6.h) \quad \nabla \times (\nabla \phi) = 0$$

Para prová-las, considere que os campos  $\phi$  e  $v_k$ , para  $k = 1, 2, 3$ , são “bem comportados” de forma que você pode assumir que a simetria das segundas derivadas

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_i} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_j \partial x_i} \quad (6.16)$$

são válidas para  $i, j = 1, 2, 3$ .

Como uma última ação dupla do operador  $\nabla$ , definimos o *laplaciano* de um campo, seja este escalar ou vetorial, como sendo a atuação do operador  $(\nabla \cdot \nabla)$ , denotado também por  $\nabla^2$ , sobre o mesmo. Este operador diferencial nada mais é do que

$$\nabla^2 = (\nabla \cdot \nabla) = \left( \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left( \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (6.17)$$

O laplaciano de um campo escalar resulta em um campo escalar, enquanto que o laplaciano de um campo vetorial resulta em um campo vetorial (isso consta nas duas últimas linhas da Tab. 6.1).

Para um campo escalar  $\phi$ , temos

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2}, \quad (6.18)$$

enquanto que, para um campo vetorial  $\mathbf{v}$ ,

$$\nabla^2 \mathbf{v} = \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial z^2} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x_i^2} = \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i^2} \hat{\mathbf{e}}_j. \quad (6.19)$$

Prove as identidades abaixo, que mostram que, para um campo escalar,  $\nabla^2 \phi$  é o mesmo que  $\nabla \cdot (\nabla \phi)$  mas que, para um campo vetorial,  $\nabla^2 \mathbf{v}$  **não** é a mesma coisa que  $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v})$ .

$$(6.i) \quad \nabla^2 \phi = \nabla \cdot (\nabla \phi)$$

$$(6.j) \quad \nabla^2 \mathbf{v} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v})$$

Por fim, prove as regras de produtos abaixo.

$$(6.k) \quad \nabla^2(\phi\psi) = \psi\nabla^2\phi + \phi\nabla^2\psi + 2(\nabla\phi) \cdot (\nabla\psi)$$

$$(6.l) \quad \nabla^2(\phi\mathbf{v}) = \phi\nabla^2\mathbf{v} + \mathbf{v}\nabla^2\phi + 2\sum_{i=1}^3(\nabla\phi \cdot \nabla v_i)\hat{\mathbf{e}}_i.$$

$$(6.m) \quad \nabla^2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \nabla^2\mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \nabla^2\mathbf{a} + 2\sum_{i=1}^3(\nabla a_i \cdot \nabla b_i).$$



## Seção 7

# Algumas propriedades do cálculo integral

Antes de falarmos de integrais propriamente dito, é conveniente relembrar algumas noções sobre conjuntos no espaço tridimensional. Algumas delas não são noções gerais mas valem particularmente para espaços como  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ , dotados da métrica Euclidiana, e assim serão úteis para que consigamos estabelecer um diálogo daqui por diante, sempre que detalhes matemáticos desse tipo se mostrarem pertinentes.

- Para um ponto  $\mathbf{a} \in \Omega$ , uma *bola aberta*  $B(\mathbf{a}, r)$ , para  $r$  real positivo, é o conjunto formado por todos os pontos  $\mathbf{x} \in \Omega$  tal que  $\mathcal{D}(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < r$ . Uma *bola fechada*  $\bar{B}(\mathbf{a}, r)$  tem a mesma definição de bola aberta mas com a condição  $\mathcal{D}(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \leq r$ . Também diz-se *bola centrada em  $\mathbf{a}$  de raio  $r$* .
- Um conjunto é *limitado* caso seja possível encontrar um ponto  $\mathbf{a}$  no conjunto e um número real  $r > 0$  tal que o conjunto esteja inteiramente contido em  $B(\mathbf{a}, r)$ . Informalmente falando, isso quer dizer que um conjunto é limitado sempre que for possível construir uma bola que contém todo esse conjunto.
- Um *ponto de fronteira* de um conjunto  $\Omega$  é tal que, para qualquer real  $r > 0$ , mesmo que tão pequeno quanto se queira, uma bola aberta de raio  $r$  centrada nesse ponto contém tanto pontos pertencentes a  $\Omega$  quanto pontos não-pertencentes a  $\Omega$ .
- O *fecho* de um conjunto  $\Omega$  é a união de  $\Omega$  com o conjunto de todos os pontos de fronteira de  $\Omega$ .
- Um conjunto é dito *fechado* caso seja igual ao seu fecho.
- Um conjunto é dito *compacto* caso seja limitado e fechado. Vale mencionar que há noções mais robustas de conjunto compacto, necessárias para contextos mais gerais. Contudo, definições mais gerais são equivalentes a essa para subconjuntos do  $\mathbb{R}^3$ .
- O *interior* de um conjunto fechado  $\Omega$  é o conjunto formado pelos pontos de  $\Omega$  que não pertencem a sua fronteira.

- O *conteúdo* de um conjunto contido em  $\mathbb{R}^3$  é, de certa forma, relacionado ao volume da região definida por esse conjunto. Dessa forma, um conjunto de conteúdo nulo é um conjunto sem volume. Por exemplo, uma curva ou uma superfície em  $\mathbb{R}^3$  são conjuntos de conteúdo nulo. A saber, há uma definição formal de conjunto de conteúdo nulo, baseada na possibilidade de uma união finita de paralelogramos contendo o conjunto cuja soma de seus volumes é tão pequena quanto se queira.

Apresentar essas noções pode parecer um “preciosismo” matemático. Você poderia argumentar que não precisaríamos nos preocupar muito com essas definições. Porém, vários resultados e propriedades do cálculo integral exigem certos requisitos dos conjuntos envolvidos, e é importante nos convenceremos de que em Eletromagnetismo sempre estaremos lidando com domínios que satisfazem essas exigências, de sorte que contra-exemplos fogem do nosso escopo. Veja abaixo alguns exemplos de interesse.

- Um fio infinito e um plano infinito são exemplos de conjuntos fechados mas não limitados.
- Uma esfera é um conjunto limitado e pode ser fechado caso inclua sua borda (sendo compacto nesse caso).
- Uma casca esférica é um conjunto compacto. Nesse caso dizemos que o conjunto é compacto de interior vazio.
- A região definida entre dois planos paralelos e infinitos (pense num capacitor de placas paralelas) constitui um conjunto não limitado. Porém, esse conjunto é fechado caso inclua os pontos dos planos.
- A região definida entre duas cascas esféricas concêntricas de raios diferentes, incluindo os pontos das cascas esféricas, é um conjunto compacto. Nesse caso dizemos que o conjunto é compacto de interior não-vazio.
- Qualquer região do espaço tridimensional com a qual trabalharemos possui fronteira de conteúdo nulo.

Ademais, outras noções importantes como conexidade serão tratadas pontualmente.

Agora estabeleçamos uma notação e relembremos alguns resultados importantes do cálculo integral envolvendo campos sobre  $\mathbb{R}^3$ . É importante que você tenha uma familiaridade prévia com a noção de integrabilidade, técnicas de integração, formas de avaliar integrais simples, duplas e triplas, com o Teorema de Fubini e com outros tópicos importantes geralmente abordados em cursos de Cálculo III. A integral volumétrica de um campo escalar  $f$  sobre um domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  será denotada por

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d^3x, \quad (7.1)$$

em que  $\Omega = \mathbb{R}^3$  caso a integral seja sobre todo o espaço. O importante comentário aqui é que, apesar da integral 7.2 ser uma integral tripla, utilizamos o símbolo de integral simples, apenas para não carregar a notação. O fato da integral ser tripla é indicado por  $d^3x$ . A notação  $d^3x$  denota o

equivalente ao volume infinitesimal  $dx dy dz$ . No caso particular de  $f(\mathbf{x}) = c$ , com  $c$  uma constante real (isto é,  $f$  é um campo constante), temos que

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d^3x = c \int_{\Omega} d^3x = cV_{\Omega}, \quad (7.2)$$

em que  $V_{\Omega}$  é o volume do conjunto  $\Omega$ . No caso de um campo vetorial  $\mathbf{v}$ , denotaremos a integral simplesmente por

$$\int_{\Omega} \mathbf{v}(\mathbf{x}) d^3x. \quad (7.3)$$

Note que a integral 7.2 resulta em uma quantidade escalar enquanto que 7.3 resulta em um vetor.

Em certas ocasiões estaremos interessados em integrais sobre superfícies e/ou curvas parametrizadas no espaço. Uma superfície parametrizada é um conjunto de pontos em  $\mathbb{R}^3$  que podem ser mapeados via uma aplicação do tipo  $\Sigma : \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^3$ , enquanto que uma curva parametrizada - ou *caminho* - é um conjunto de pontos que podem ser mapeados via uma aplicação do tipo  $\Gamma : \mathcal{A} \subset \mathbb{R} \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Por essa razão, integrais de um campo escalar  $f$  sobre pontos de uma superfície  $\Sigma$  e uma curva  $\Gamma$  são, respectivamente, escritos na forma

$$\int_{\Sigma} f(\mathbf{x}) d^2x \quad (7.4)$$

e

$$\int_{\Gamma} f(\mathbf{x}) dx, \quad (7.5)$$

onde indicamos que a integral é dupla (eq. 7.4) ou simples (eq. 7.5) pelos elementos  $d^2x$  e  $dx$ . Para um campo vetorial a notação é análoga.

## O fluxo e a circulação de um campo vetorial

Duas das definições mais importantes para nós são a de fluxo e a de circulação - de um campo vetorial, que envolvem respectivamente integrais sobre superfícies e sobre curvas/caminhos. A um elemento infinitesimal de área  $d^2x$  sobre uma superfície dita *orientável*  $\Sigma$ , localizado em um ponto  $\mathbf{x}$ , pode ser atribuído um versor de orientação  $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$  perpendicular a essa superfície nesse ponto. O sentido desse versor é adotado por convenção e/ou conveniência. Para superfícies fechadas (equivalente a conjuntos compactos de interior vazio), convencionou-se que o versor  $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$  sempre aponta “para fora”, ou seja, da região interior à superfície para a região exterior. Aqui pode haver uma confusão infeliz em relação ao termo *fechada* para nos referirmos a uma superfície. A definição de ‘conjunto fechado’, apresentada na página 18, é diferente do que queremos dizer quando usamos o termo ‘superfície fechada’ - ou até mesmo ‘curva fechada’, que será explorado em seguida - no contexto da Física. Você pode estabelecer que uma superfície fechada equivale ao fecho de um compacto, ou até mesmo pensar que uma superfície fechada é aquela que define (ou enclausura/envolve) um volume bem definido em  $\mathbb{R}^3$ .

O fluxo de um campo vetorial  $\mathbf{v}$  sobre uma superfície  $\Sigma$  é dado por

$$\int_{\Sigma} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) d^2x. \quad (7.6)$$

Ou seja, quando integramos a quantidade  $\mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$ , apenas a componente de  $\mathbf{v}$  ao longo da direção definida por  $\hat{\mathbf{n}}$ , em cada ponto  $\mathbf{x}$ , que contribui para o fluxo. Caso  $\Sigma$  seja uma superfície fechada, denotamos o fluxo por

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) d^2x. \quad (7.7)$$

Seguindo adiante, o conceito de circulação é ligado a integrais de linha. Seja  $\Gamma$  uma curva parametrizada *derivável* - isto é,  $\Gamma(t)$  é um vetor derivável em relação a seu parâmetro  $t$  - a integral de linha de um campo vetorial  $\mathbf{v}$  sobre a curva  $\Gamma$ , entre dois de seus pontos A e B, é denotada por

$$\int_{\Gamma_{A \rightarrow B}} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{l}. \quad (7.8)$$

Portanto, numa integral de linha apenas a componente de  $\mathbf{v}$  ao longo da direção definida por  $d\mathbf{l}$ , em cada ponto  $\mathbf{x}$ , contribui para o resultado. Isto posto, caso  $\Gamma$  seja uma curva fechada, a *circulação do campo*  $\mathbf{v}$  é a integral de linha

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{l}. \quad (7.9)$$

Aqui, uma curva fechada é um *laço* (ou *loop*). Em outras palavras, uma curva parametrizada da forma  $\Gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^3$  é fechada se  $\Gamma(a) = \Gamma(b)$ . Importante ressaltar que uma curva fechada pode ser usada para definir uma família de superfícies (abertas) cuja borda é a própria curva.

## O Teorema da divergência de Gauss

Seja  $\Omega$  um compacto de interior não-vazio em  $\mathbb{R}^3$  cuja fronteira coincide com a imagem de uma superfície fechada  $\partial\Omega$  orientável (a orientação do versor normal é convencionalmente tomada como sendo de dentro para fora). O Teorema da divergência de Gauss estabelece que, para um campo vetorial derivável em  $\Omega$ , temos que

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) d^3x = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) d^2x. \quad (7.10)$$

Demonstrações do Teorema da divergência de Gauss podem ser encontradas em livros de Cálculo.

## O Teorema de Stokes

Seja  $\mathbf{v}$  um campo vetorial derivável em um conjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Seja também  $\Sigma$  uma superfície aberta e orientável contida em  $\Omega$  cuja fronteira (borda) é a curva fechada  $\Gamma$ . O Teorema de Stokes estabelece que

$$\int_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{x})) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) d^2x = \oint_{\Gamma} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{l}. \quad (7.11)$$

Em outras palavras, o fluxo do rotacional de  $\mathbf{v}$  sobre  $\Sigma$  é o mesmo que a circulação de  $\mathbf{v}$  sobre  $\Gamma$ . O sentido de integração sobre  $\Gamma$  deve respeitar a mesma orientação da superfície  $\Sigma$  (“regra da mão direita”). Demonstrações do Teorema de Stokes podem ser encontradas em bons livros de Cálculo. Vale mencionar, no entanto, que existe uma sutileza a respeito da validade do Teorema de Stokes. A saber, se a superfície  $\Sigma$  não for *simplesmente conexa*<sup>1</sup>, a igualdade 7.11 não é necessariamente válida.

## O Teorema fundamental do gradiente

Seja  $f$  um campo escalar definido em  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  e  $\Gamma$  uma curva contida em  $\Omega$ . O Teorema fundamental do gradiente diz que, para uma integral de linha do gradiente de  $f$  entre os pontos  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ , ambos contidos em  $\Gamma$ , resulta em

$$\int_{\Gamma_{\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b}}} \nabla f(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{l} = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) \quad (7.12)$$

independente do caminho sobre a curva  $\Gamma$  entre os pontos  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ . Esse é um resultado que pode ser derivado imediatamente da equação 6.3. Decorre imediatamente desse Teorema que, para qualquer uma curva *fechada*,

$$\oint_{\Gamma} \nabla f(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{l} = 0. \quad (7.13)$$

A partir dos três Teoremas acima, prove os corolários abaixo, válidos para qualquer campo escalar  $f$  e qualquer campo vetorial  $\mathbf{v}$  deriváveis. Considere que  $\Omega$  é um conjunto compacto de interior não vazio cuja fronteira é a superfície fechada  $\partial\Omega$  e que  $\Sigma$  é uma superfície aberta cuja curva de fronteira é  $\partial\Sigma$ .

(7.a)

$$\int_{\Omega} (\nabla f) d^3x = \oint_{\partial\Omega} f \hat{\mathbf{n}} d^2x$$

(7.b)

$$\int_{\Omega} (\nabla \times \mathbf{v}) d^3x = - \oint_{\partial\Omega} \mathbf{v} \times \hat{\mathbf{n}} d^2x$$

(7.c)

$$\int_{\Sigma} \nabla f \times \hat{\mathbf{n}} d^2x = - \oint_{\partial\Sigma} f d\mathbf{l}$$

Sugestão: Siga as dicas do problema 1.60 do cap. 1 do livro *Introduction to Electrodynamics*, do Griffiths.

---

<sup>1</sup>A definição de conexidade pode ser encontrada em livros de Cálculo.

Como um último exercício importante, vamos resolver o problema 1.61 do livro *Introduction to Electrodynamics*, do Griffiths, cap. 1. A integral

$$\mathbf{a} \equiv \int_{\Sigma} \hat{\mathbf{n}} dS \quad (7.14)$$

é às vezes chamada de vetor área da superfície  $\Sigma$ . Se  $\Sigma$  for uma superfície plana, então  $\|\mathbf{a}\|$  equivale à área usual da superfície. Mostre que

(7.d)  $\mathbf{a} = 0$  para qualquer superfície fechada.

(7.e)  $\mathbf{a}$  é o mesmo para todas as superfícies que tem o mesmo contorno.

(7.f)

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} \mathbf{x} \times d\mathbf{l},$$

em que  $\Gamma$  é a linha de contorno da superfície  $\Sigma$ .

## Seção 8

# Coordenadas curvilíneas

Em muitas situações o sistema de coordenadas cartesiano se mostra inconveniente, sugerindo alternativas. Os sistemas de coordenadas cilíndricas e esféricas são exemplos de coordenadas *curvilíneas* que exploraremos largamente ao longo do curso. As conveniências desses sistemas de coordenadas alternativos se faz, principalmente, em problemas envolvendo algum tipo de simetria.

Uma mudança de sistema de coordenadas geral é uma transformação do tipo  $(x, y, z) \rightarrow (u, v, w)$ , com  $u = u(x, y, z)$ ,  $v = v(x, y, z)$  e  $w = w(x, y, z)$ . Via de regra essa transformação é inversível,  $(u, v, w) \rightarrow (x, y, z)$ , de forma que podemos escrever  $x = x(u, v, w)$ ,  $y = y(u, v, w)$  e  $z = z(u, v, w)$ . Esta seção se dedica a apresentar os dois sistemas de coordenadas mencionados acima, bem como formas de escrever versores, vetores posição e deslocamento, entre outros aspectos.

### Coordenadas cilíndricas

O sistema de coordenadas cilíndricas é obtido via transformação  $(x, y, z) \rightarrow (s, \varphi, z)$ , tal que  $z \rightarrow z$  (para a coordenada  $z$  os sistemas coincidem) e:

$$\begin{aligned} s &= s(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi &= \varphi(x, y, z) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right). \end{aligned} \tag{8.1}$$

Essas relações podem ser invertidas de forma que a transformação  $(s, \varphi, z) \rightarrow (x, y, z)$  é definida por

$$\begin{aligned} x &= x(s, \varphi, z) = s \cos \varphi \\ y &= y(s, \varphi, z) = s \sin \varphi, \end{aligned} \tag{8.2}$$

e novamente a coordenada  $z$  equivale àquela das cartesianas. As coordenadas cilíndricas são tais que  $0 \leq \rho < \infty$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$  e  $-\infty < z < \infty$ . É muito comum autores utilizarem  $r$  ou  $\rho$  no lugar de  $s$ . Por exemplo, o texto do Griffiths usa  $s$  e o texto do Jackson usa  $\rho$ . É sempre bom ter o olho atento para reconhecer as diferentes notações. No nosso curso a notação  $s$  será preferida

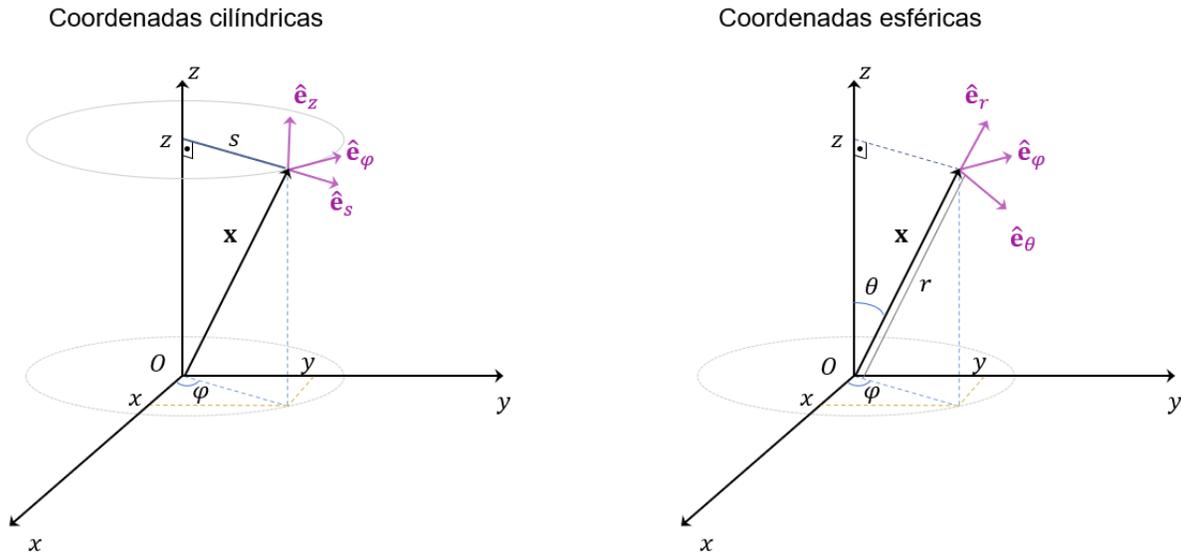


Figura 8.1: Sistema de coordenadas cilíndricas, à esquerda, indicando as coordenadas  $s$ ,  $\varphi$  e  $z$  assim como os vetores  $\hat{\mathbf{e}}_s$ ,  $\hat{\mathbf{e}}_\varphi$  e  $\hat{\mathbf{e}}_z$ . Sistema de coordenadas esféricas, à direita, indicando as coordenadas  $r$ ,  $\theta$  e  $\varphi$  assim como os vetores  $\hat{\mathbf{e}}_r$ ,  $\hat{\mathbf{e}}_\theta$  e  $\hat{\mathbf{e}}_\varphi$ .

pois reservaremos  $r$  para as coordenadas esféricas e  $\rho$  é um símbolo que usaremos para densidade volumétrica de carga, evitando algumas confusões.

Como mencionado acima, a coordenada  $z$  do sistema de coordenadas cilíndricas coincide com a coordenada  $z$  do sistema de coordenadas cartesianas. Já as coordenadas  $s$  e  $\phi$  possuem outras interpretações geométricas. Dado um ponto no espaço  $\mathbf{x}$ , a coordenada  $s$  equivale a *distância do ponto ao eixo z* (ver Fig.8.1). A coordenada  $\varphi$ , por outro lado, designa um ângulo planar, definido sobre o plano  $xy$ , entre o eixo  $x$  e a projeção de  $\mathbf{x}$  sobre esse mesmo plano. Note que, diferentemente das coordenadas cartesianas, em que as três coordenadas possuem dimensão física de comprimento, a coordenada  $\varphi$  é uma quantidade adimensional. Isto de forma alguma representa um problema na noção de coordenada. É fácil se convencer de que qualquer ponto no espaço tridimensional fica perfeitamente localizado por meio destas três quantidades.

O sistema de coordenadas cilíndricas possui seu próprio conjunto de três vetores, cada qual associado a uma das três coordenadas, de forma que um vetor qualquer  $\mathbf{a}$  pode ser expandido como na forma 3.1. Ou seja,

$$\mathbf{a} = a_s \hat{\mathbf{e}}_s + a_\varphi \hat{\mathbf{e}}_\varphi + a_z \hat{\mathbf{e}}_z. \quad (8.3)$$

Esses vetores podem ser expressos em termos dos vetores cartesianos, com uma transformação do tipo  $(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3) \rightarrow (\hat{\mathbf{e}}_s, \hat{\mathbf{e}}_\varphi, \hat{\mathbf{e}}_z)$ . Obter explicitamente essa transformação é uma tarefa relativamente simples, e é baseada na ideia de que o vetor associado a uma certa coordenada deve “apontar” na direção e sentido do incremento dessa coordenada, mantendo as outras fixas (repare que isso é consistente com os vetores  $\hat{\mathbf{e}}_1$ ,  $\hat{\mathbf{e}}_2$  e  $\hat{\mathbf{e}}_3$  das coordenadas cartesianas). Por exemplo, para a

coordenada  $s$ , o versor  $\hat{\mathbf{e}}_s$  deve ser paralelo à

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s} = \frac{\partial x}{\partial s} \hat{\mathbf{e}}_1 + \frac{\partial y}{\partial s} \hat{\mathbf{e}}_2 + \frac{\partial z}{\partial s} \hat{\mathbf{e}}_3 = \cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_1 + \sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_2. \quad (8.4)$$

Note que o módulo desse vetor é  $\sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1$ , e dessa forma podemos simplesmente escrever  $\hat{\mathbf{e}}_s = \cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_1 + \sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_2$ . De uma maneira mais geral,

$$\hat{\mathbf{e}}_u = \left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \right\|^{-1} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}, \quad (8.5)$$

em que  $u = s, \varphi, z$ . Em outras palavras, o versor  $\hat{\mathbf{e}}_u$  é simplesmente o vetor  $\partial \mathbf{x} / \partial u$  *normalizado*. Usando essa ideia mostre que

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{e}}_s &= \cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_1 + \sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_2 \\ \hat{\mathbf{e}}_\varphi &= -\sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_1 + \cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_2 \\ \hat{\mathbf{e}}_z &= \hat{\mathbf{e}}_3 \end{aligned} \quad (8.6)$$

e que esses versores são ortogonais dois a dois. Repare que os versores das coordenadas cilíndricas *dependem* das coordenadas - em particular, eles dependem explicitamente do valor de  $\varphi$ . Isto é, eles não são os mesmos a depender do vetor posição, coisa que não acontece com os versores cartesianos. Veja esses versores da maneira como estão indicados na Fig. 8.1 e tente se convencer “visualmente” de que eles são consistentes com as expressões 8.6. O vetor posição nesse sistema é da forma 8.3, e podemos obtê-lo com o uso das relações 8.2 e dos versores 8.6 da seguinte maneira:

$$\mathbf{x} = x \hat{\mathbf{e}}_1 + y \hat{\mathbf{e}}_2 + z \hat{\mathbf{e}}_3 = s \cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_1 + s \sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_2 + z \hat{\mathbf{e}}_3 = s \hat{\mathbf{e}}_s + z \hat{\mathbf{e}}_z. \quad (8.7)$$

Ou seja, o vetor posição não possui nenhuma componente  $\varphi$ , e é escrito simplesmente como a soma do vetor  $s \hat{\mathbf{e}}_s$  com o vetor  $z \hat{\mathbf{e}}_z$ , cujo módulo é naturalmente  $\sqrt{s^2 + z^2}$ . Perceba pela Fig. 8.1 que essa soma de vetores resultando em  $\mathbf{x}$  faz todo sentido, e que o  $\mathbf{x}$  é sempre ortogonal à  $\hat{\mathbf{e}}_\varphi$ . As relações 8.6 podem ser invertidas (tente fazê-lo!) de forma que a transformação inversa  $(\hat{\mathbf{e}}_s, \hat{\mathbf{e}}_\varphi, \hat{\mathbf{e}}_z) \rightarrow (\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3)$  é

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{e}}_1 &= \cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_s - \sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_\varphi \\ \hat{\mathbf{e}}_2 &= \sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_s + \cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_\varphi \\ \hat{\mathbf{e}}_3 &= \hat{\mathbf{e}}_z. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Já estamos em condição de concluir que, em coordenadas cilíndricas, dois vetores posição  $\mathbf{x}$  - com coordenadas  $(s, \varphi, z)$  - e  $\mathbf{x}'$  - com coordenadas  $(s', \varphi', z')$  - possuem conjuntos de versores diferentes. Na verdade, o único versor dos dois conjuntos que naturalmente coincide é  $\hat{\mathbf{e}}_{z'} = \hat{\mathbf{e}}_z$ . O vetor deslocamento pode ser escrito como

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}' = s \hat{\mathbf{e}}_s - s' \hat{\mathbf{e}}_{s'} + z \hat{\mathbf{e}}_z - z' \hat{\mathbf{e}}_{z'} = s \hat{\mathbf{e}}_s - s' \hat{\mathbf{e}}_{s'} - (z - z') \hat{\mathbf{e}}_z. \quad (8.9)$$

Note que não conseguimos colocar os termos envolvendo  $s$  e  $s'$  em evidência pois os versores, em geral, não coincidem (apenas coincidem se  $\varphi' = \varphi$ ). Inclusive, uma relação muito útil é obtida quando estudamos o produto escalar entre  $\hat{\mathbf{e}}_s$  e  $\hat{\mathbf{e}}_{s'}$ , isto é,

$$\hat{\mathbf{e}}_s \cdot \hat{\mathbf{e}}_{s'} = (\cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_1 + \sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_2) \cdot (\cos \varphi' \hat{\mathbf{e}}_1 + \sin \varphi' \hat{\mathbf{e}}_2) = \cos \varphi \cos \varphi' + \sin \varphi \sin \varphi' = \cos(\varphi - \varphi'). \quad (8.10)$$

Com isso, mostramos que o *módulo* do vetor deslocamento é dado por

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| = \sqrt{s^2 + s'^2 - 2ss' \cos(\varphi - \varphi') + (z - z')^2}. \quad (8.11)$$

Por fim, a última parte deste tópico é mostrar como se escreve elementos infinitesimais de comprimento (ou deslocamento infinitesimal), área e volume em coordenadas cilíndricas. Começando pelo deslocamento infinitesimal; considere a diferença entre um vetor posição “deslocado”  $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + d\mathbf{l}$  e um vetor posição de referência  $\mathbf{x}$ . Cada um desses vetores possui coordenadas  $(s + ds, \varphi + d\varphi, z + dz)$  e  $(s, \varphi, z)$ , respectivamente, e possuem dois conjuntos de versores distintos. Nosso objetivo aqui é escrever essa diferença, denotada por  $d\mathbf{l}$ , em termos dos versores do vetor de referência  $\mathbf{x}$ , dados pelas relações 8.6. Podemos expressar  $\mathbf{x}'$  como  $s'\hat{\mathbf{e}}_{s'} + z'\hat{\mathbf{e}}_{z'}$ , que é o mesmo que:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + d\mathbf{l} &= (s + ds) [\cos(\varphi + d\varphi)\hat{\mathbf{e}}_1 + \sin(\varphi + d\varphi)\hat{\mathbf{e}}_2] + (z + dz)\hat{\mathbf{e}}_3 \\ &\approx (s + ds)[\cos \varphi - d\varphi \sin \varphi]\hat{\mathbf{e}}_1 + (s + ds)[\sin \varphi + d\varphi \cos \varphi]\hat{\mathbf{e}}_2 + (z + dz)\hat{\mathbf{e}}_3 \\ &\approx [s(\cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_1 + \sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_2) + z\hat{\mathbf{e}}_3] + [ds(\cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_1 + \sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_2) + sd\varphi(-\sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_1 + \cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_2) + dz\hat{\mathbf{e}}_3] \\ &= \mathbf{x} + [ds\hat{\mathbf{e}}_s + sd\varphi\hat{\mathbf{e}}_\varphi + dz\hat{\mathbf{e}}_z], \end{aligned} \quad (8.12)$$

onde da primeira para a segunda linha eu exploro as aproximações  $\cos(d\varphi) \approx 1$  e  $\sin(d\varphi) \approx d\varphi$ , enquanto que da segunda para a terceira eu desprezo termos infinitesimais quadráticos como  $dsd\varphi$ . Concluimos assim que

$$d\mathbf{l} = ds\hat{\mathbf{e}}_s + sd\varphi\hat{\mathbf{e}}_\varphi + dz\hat{\mathbf{e}}_z. \quad (8.13)$$

Comparando a equação 8.13 com 6.1, podemos sugerir que, para um sistema de coordenadas genérico  $(u, v, w)$ , deslocamentos infinitesimais são da forma

$$d\mathbf{l} = l_u du \hat{\mathbf{e}}_u + l_v dv \hat{\mathbf{e}}_v + l_w dw \hat{\mathbf{e}}_w, \quad (8.14)$$

onde  $l_u$ ,  $l_v$  e  $l_w$  são funções específicas das coordenadas  $u$ ,  $v$  e  $w$ . Por exemplo, no caso das coordenadas cartesianas temos  $l_x = l_y = l_z = 1$ , enquanto que nas coordenadas cilíndricas temos  $l_s = 1$ ,  $l_\varphi = s$  e  $l_z = 1$ . O primeiro comentário pertinente aqui é que cada um dos termos da expressão 8.14 deve ter dimensão física de comprimento. Assim, essas funções *devem compensar* a dimensão física da própria coordenada. Quero dizer que  $l_u du$ ,  $l_v dv$  e  $l_w dw$  necessariamente têm dimensões de comprimento mesmo que uma das coordenadas  $u$ ,  $v$  ou  $w$  não o tenha. Nas

coordenadas cilíndricas as coordenadas  $s$  e  $z$  já possuem dimensão de comprimento por si só, de fato, mas isso fica claro quando olhamos, por exemplo, para a coordenada  $\varphi$  (adimensional), que por sua vez exige que  $l_\varphi$  tenha dimensão de comprimento para que  $l_\varphi d\varphi$  também o tenha (repare que esse é justamente o caso, pois  $l_\varphi = s$ ). Sempre use esse fato para confirmar que suas expressões estão dimensionalmente coerentes. Em segundo lugar, a introdução dessas funções nos fornece uma maneira muitíssimo conveniente de expressar formas infinitesimais de áreas e volumes num dado sistema de coordenadas. Isso se deve ao fato de que  $l_u du$  pode ser interpretado como um elemento de comprimento infinitesimal ao longo da direção de  $\hat{e}_u$ , e o mesmo vale para as outras duas coordenadas. Dessa forma, um elemento de área *orientada* na direção de um dos três versores - digamos,  $\hat{e}_w$  - é dado por  $\hat{n} d^2x \rightarrow \hat{e}_w l_u l_v dudv$ . Você pode ler o fator  $l_u l_v dudv$  como a área de um “retângulo” perpendicular à direção de  $w$ .

Para ilustrar, considere uma superfície (casca) cilíndrica de raio  $R$  e comprimento infinito cujo eixo principal coincide com o eixo  $z$ . Se  $\mathbf{x}$  um ponto dessa superfície, ele possui coordenadas  $(s = R, \varphi, z)$ , com  $0 \leq \varphi < 2\pi$  e  $-\infty < z < \infty$ , e um elemento orientado de área sobre a superfície em torno de  $\mathbf{x}$  é escrito como  $(l_\varphi l_z d\varphi dz \hat{e}_s)|_{(s=R)} = R d\varphi dz \hat{e}_s = R d\varphi dz (\cos \varphi \hat{e}_1 + \sin \varphi \hat{e}_2)$ .

Seguindo adiante, um volume infinitesimal é escrito como  $(l_u du)(l_v dv)(l_w dw) = l_u l_v l_w dudvdw$ , que tem interpretação de volume de um “cubo” elementar nesse sistema de coordenadas. Em coordenadas cilíndricas esse elemento de volume é dado por  $s ds d\varphi dz$ . Um olhar mais atento sugere que essa construção é análoga ao que se faz na mudança de variáveis em integrais triplas, onde  $dx dy dz \rightarrow s ds d\varphi dz$  e o fator  $s$  é o módulo do *jacobiano* da transformação definida em 8.1.

## Coordenadas esféricas

Trataremos agora do sistema de coordenadas esféricas, obtido pela transformação  $(x, y, z) \rightarrow (r, \theta, \varphi)$  tal que

$$\begin{aligned} r &= r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta &= \theta(x, y, z) = \arctan \left( \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \right) \\ \varphi &= \varphi(x, y, z) = \arctan \left( \frac{y}{x} \right). \end{aligned} \tag{8.15}$$

A transformação inversa  $(r, \theta, \varphi) \rightarrow (x, y, z)$  é dada por

$$\begin{aligned} x &= x(r, \theta, \varphi) = r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= y(r, \theta, \varphi) = r \sin \theta \sin \varphi \\ z &= z(r, \theta, \varphi) = r \cos \theta. \end{aligned} \tag{8.16}$$

As coordenadas esféricas são definidas de forma que  $0 \leq r < \infty$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$  e  $0 \leq \varphi < 2\pi$ , onde é importante que nos convençamos de que definí-las nesses intervalos é suficiente para que qualquer

ponto do espaço fique perfeitamente localizado. Na Fig. 8.1 à direita você poderá observar o que as coordenadas  $r$ ,  $\theta$  e  $\phi$  significam geometricamente em relação a um vetor posição  $\mathbf{x}$  arbitrário, sendo  $r$  o módulo de  $\mathbf{x}$  ( $r = \|\mathbf{x}\|$ ),  $\theta$  o ângulo planar entre o  $\mathbf{x}$  e o eixo  $z$  - definido sobre o plano formado entre eles - e  $\varphi$  é o mesmo ângulo planar  $\varphi$  das coordenadas cilíndricas. Na linguagem usual,  $\theta$  é conhecido como ângulo *polar* enquanto que  $\varphi$  é conhecido como ângulo *azimutal*.

Seguiremos de forma análoga ao que fizemos para as coordenadas cilíndricas, e nos basearemos na equação 8.5 para estudar a transformação  $(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3) \rightarrow (\hat{\mathbf{e}}_r, \hat{\mathbf{e}}_\theta, \hat{\mathbf{e}}_\varphi)$  e expressar os novos versores como<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{e}}_r &= \sin \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_1 + \sin \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_2 + \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_3 \\ \hat{\mathbf{e}}_\theta &= \cos \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_1 + \cos \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_2 - \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_3 \\ \hat{\mathbf{e}}_\varphi &= -\sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_1 + \cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_2.\end{aligned}\tag{8.17}$$

Você pode checar que esses versores são ortogonais dois a dois. A Fig. 8.1 mostra os versores  $\hat{\mathbf{e}}_r$ ,  $\hat{\mathbf{e}}_\theta$  e  $\hat{\mathbf{e}}_\varphi$ . Um vetor qualquer  $\mathbf{a}$  é representado em coordenadas esféricas na forma

$$\mathbf{a} = a_r \hat{\mathbf{e}}_r + a_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta + a_\varphi \hat{\mathbf{e}}_\varphi,\tag{8.18}$$

em que  $a_r$ ,  $a_\theta$  e  $a_\varphi$  são chamadas, respectivamente, de componentes radial, polar e azimutal de  $\mathbf{a}$ . Porém, especialmente para um vetor posição  $\mathbf{x}$ , o versor  $\hat{\mathbf{e}}_r$  possui a mesma direção e sentido de  $\mathbf{x}$ , enquanto que  $\hat{\mathbf{e}}_\theta$  e  $\hat{\mathbf{e}}_\varphi$  são sempre ortogonais a  $\mathbf{x}$ . Isso fica claro quando usamos as relações 8.15 e 8.20 para escrever  $\mathbf{x}$  como

$$\mathbf{x} = x\hat{\mathbf{e}}_1 + y\hat{\mathbf{e}}_2 + z\hat{\mathbf{e}}_3 = r \sin \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_1 + r \sin \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_2 + r \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_3 = r\hat{\mathbf{e}}_r.\tag{8.19}$$

Sim, o vetor posição em coordenadas esféricas é simplesmente  $\mathbf{x} = r\hat{\mathbf{e}}_r$ , donde claramente  $\|\mathbf{x}\| = r$ , como deveria ser, e toda informação sobre direção e sentido de  $\mathbf{x}$  fica codificada no versor  $\hat{\mathbf{e}}_r$ . As relações 8.20 são inversíveis (tente fazê-lo!), de forma que podemos escrever a transformação  $(\hat{\mathbf{e}}_r, \hat{\mathbf{e}}_\theta, \hat{\mathbf{e}}_\varphi) \rightarrow (\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3)$  como

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{e}}_1 &= \sin \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_r + \cos \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_\theta - \sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_\varphi \\ \hat{\mathbf{e}}_2 &= \sin \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_r + \cos \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_\theta + \cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_\varphi \\ \hat{\mathbf{e}}_3 &= \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_r - \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_\theta.\end{aligned}\tag{8.20}$$

Sendo  $\mathbf{x} = r\hat{\mathbf{e}}_r$  e  $\mathbf{x}' = r'\hat{\mathbf{e}}_{r'}$  dois vetores posição cujas coordenadas são, respectivamente,  $(r, \theta, \varphi)$  e  $(r', \theta', \varphi')$ , o vetor deslocamento entre eles é simplesmente escrito por

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}' = r\hat{\mathbf{e}}_r - r'\hat{\mathbf{e}}_{r'},\tag{8.21}$$

---

<sup>1</sup>Você pode calculá-los como um exercício

onde, **reforço**, os versores  $\hat{\mathbf{e}}_r$  e  $\hat{\mathbf{e}}_{r'}$  não são iguais, em geral. A saber, o produto escalar entre esses versores é

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \hat{\mathbf{e}}_{r'} &= \sin \theta \sin \theta' \cos \varphi \cos \varphi' + \sin \theta \sin \theta' \sin \varphi \sin \varphi' + \cos \theta \cos \theta' \\ &= \sin \theta \sin \theta' \cos (\varphi - \varphi') + \cos \theta \cos \theta',\end{aligned}\tag{8.22}$$

de sorte que podemos escrever o módulo do vetor deslocamento como

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \sin \theta \sin \theta' \cos (\varphi - \varphi') - 2rr' \cos \theta \cos \theta'}.\tag{8.23}$$

Analogamente ao que foi discutido para as coordenadas cilíndricas, por fim, a última parte deste tópico é mostrar como se escreve elementos infinitesimais de comprimento (ou deslocamento infinitesimal), área e volume em coordenadas esféricas. Começando pelo deslocamento infinitesimal; considere a diferença entre um vetor posição “deslocado”  $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + d\mathbf{l}$  e um vetor posição de referência  $\mathbf{x}$ . Cada um desses vetores possui coordenadas  $(r + dr, \theta + d\theta, \varphi + d\varphi)$  e  $(r, \theta, \varphi)$ , respectivamente, e possuem dois conjuntos de versores distintos. Nosso objetivo aqui é escrever essa diferença, denotada por  $d\mathbf{l}$ , em termos dos versores do vetor de referência  $\mathbf{x}$ , dados pelas relações 8.20. Podemos expressar  $\mathbf{x}'$  como  $r'\hat{\mathbf{e}}_{r'}$ , que é o mesmo que:

$$\begin{aligned}\mathbf{x} + d\mathbf{l} &= (r + dr) [\sin (\theta + d\theta) \cos (\varphi + d\varphi)\hat{\mathbf{e}}_1 + \sin (\theta + d\theta) \sin (\varphi + d\varphi)\hat{\mathbf{e}}_2 + \cos (\theta + d\theta)\hat{\mathbf{e}}_3] \\ &\approx (r + dr) \{ [\sin \theta + d\theta \cos \theta] [\cos \varphi - d\varphi \sin \varphi] \hat{\mathbf{e}}_1 + [\sin \theta + d\theta \cos \theta] [\sin \varphi + d\varphi \cos \varphi] \hat{\mathbf{e}}_2 \\ &\quad + [\cos \theta - d\theta \sin \theta] \hat{\mathbf{e}}_3 \} \\ &\approx (r + dr) \{ \sin \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_1 + [d\theta \cos \theta \cos \varphi - d\varphi \sin \theta \sin \varphi] \hat{\mathbf{e}}_1 + \sin \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_2 \\ &\quad + [d\theta \cos \theta \sin \varphi + d\varphi \sin \theta \cos \varphi] \hat{\mathbf{e}}_2 + [\cos \theta - d\theta \sin \theta] \hat{\mathbf{e}}_3 \} \\ &\approx \{ r \sin \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_1 + r \sin \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_2 + r \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_3 \} + dr \{ \sin \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_1 + \sin \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_2 + \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_3 \} \\ &\quad + rd\theta \{ \cos \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_1 + \cos \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_2 - \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_3 \} + r \sin \theta d\varphi \{ -\sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_1 + \cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_2 \} \\ &= \mathbf{x} + dr\hat{\mathbf{e}}_r + rd\theta\hat{\mathbf{e}}_\theta + r \sin \theta d\varphi\hat{\mathbf{e}}_\varphi,\end{aligned}\tag{8.24}$$

onde aplica-se as mesmas aproximações que no caso das coordenadas cilíndricas. Concluimos então que

$$d\mathbf{l} = dr\hat{\mathbf{e}}_r + rd\theta\hat{\mathbf{e}}_\theta + r \sin \theta d\varphi\hat{\mathbf{e}}_\varphi,\tag{8.25}$$

que por sua vez também é da forma 8.14, com  $l_r = 1$ ,  $l_\theta = r$  e  $l_\varphi = r \sin \theta$ . Note como as dimensões físicas estão consistentes.

Elementos infinitesimais de área e volume são construídos da mesma maneira. Como uma ilustração, considere uma superfície (casca) esférica de raio  $R$ . Um ponto  $\mathbf{x}$  sobre essa superfície

possui coordenadas  $(r = R, \theta, \varphi)$ , com  $0 \leq \theta \leq \pi$  e  $0 \leq \varphi < 2\pi$ , e é da forma  $\mathbf{x} = R\hat{\mathbf{e}}_r$ . Novamente, toda informação a respeito da localização angular (polar e azimutal) do ponto está contida no versor  $\hat{\mathbf{e}}_r$ . Um elemento de área sobre essa superfície localizado sobre  $\mathbf{x}$  é da forma  $(l_\theta l_\varphi d\theta d\varphi \hat{\mathbf{e}}_r)|_{r=R} = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi \hat{\mathbf{e}}_r$ . Finalmente, um elemento de volume no sistema de coordenadas esféricas é da forma  $l_r l_\theta l_\varphi = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$ , onde novamente você poderá reconhecer o módulo do jacobiano da transformação  $(x, y, z) \rightarrow (r, \theta, \varphi)$ .

Tabela 8.1: Funções  $l$ 's para cada sistema de coordenadas.

Sistema de coord.	$u$	$v$	$w$	$l_u$	$l_v$	$l_w$
Cartesiano	$x$	$y$	$z$	1	1	1
Cilíndrico	$s$	$\varphi$	$z$	1	$s$	1
Esférico	$r$	$\theta$	$\varphi$	1	$r$	$r \sin\theta$

## Operadores diferenciais em coordenadas curvilíneas

Há uma maneira sistemática de apresentar os operadores gradiente, divergente e o rotacional em coordenadas curvilíneas. A ideia é baseada nos três Teoremas fundamentais do cálculo integral mostrados e segue a estratégia apresentada no Apêndice A do livro do Griffiths. Vamos considerar um sistemas de coordenadas arbitrário como sendo associado às coordenadas  $(u, v, w)$ . Reforçando o mesmo comentário que fiz sobre as dimensões físicas atribuídas a cada uma dessas coordenadas, nenhuma delas *precisa* ser uma quantidade com dimensão de comprimento (vimos nas últimas subseções que elas podem representar ângulos, por exemplo). Nosso objetivo aqui é estabelecer expressões para o gradiente, o divergente, o rotacional e o laplaciano nesse sistema de coordenadas arbitrário. Começando pelo gradiente, um campo escalar escrito nesse sistema de coordenadas é do tipo  $\phi = \phi(u, v, w)$  e tem sua forma diferencial escrita como

$$d\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial u}\right) du + \left(\frac{\partial\phi}{\partial v}\right) dv + \left(\frac{\partial\phi}{\partial w}\right) dw. \quad (8.26)$$

Repare que os dois membros da equação acima possuem a mesma dimensão de  $\phi$  independente da dimensão de  $u$ ,  $v$  e  $w$ . Vimos nos exemplos das coordenadas cilíndricas e esféricas que um vetor deslocamento infinitesimal é da forma 8.14, ou seja,

$$d\mathbf{l} = l_u du \hat{\mathbf{e}}_u + l_v dv \hat{\mathbf{e}}_v + l_w dw \hat{\mathbf{e}}_w,$$

onde, novamente, os termos denotados por  $l_u$ ,  $l_v$  e  $l_w$ , cada qual associado a cada uma da três coordenadas, são funções de  $u$ ,  $v$  e  $w$ , além de terem dimensão física tal que  $l_u du$ ,  $l_v dv$  e  $l_w dw$  tenham todos dimensão de comprimento. As funções  $l$ 's para os sistemas de coordenadas cartesiano, cilíndrico e esférico estão mostrados na Tab. 8.1. Você pode confirmar pela Tabela que sempre que a coordenada por si só já possuir dimensões de comprimento seu  $l$  correspondente é adimensional,

e vice-versa. Uma vez que o gradiente é do tipo

$$\nabla\phi = (\nabla\phi)_u \hat{\mathbf{e}}_u + (\nabla\phi)_v \hat{\mathbf{e}}_v + (\nabla\phi)_w \hat{\mathbf{e}}_w, \quad (8.27)$$

a equação 8.26 pode ser reescrita como

$$d\phi = \nabla\phi \cdot d\mathbf{l} = (\nabla\phi)_u l_u du + (\nabla\phi)_v l_v dv + (\nabla\phi)_w l_w dw. \quad (8.28)$$

Comparando as equações 8.26 e 8.28, obtemos

$$\nabla\phi = \frac{1}{l_u} \left( \frac{\partial\phi}{\partial u} \right) \hat{\mathbf{e}}_u + \frac{1}{l_v} \left( \frac{\partial\phi}{\partial v} \right) \hat{\mathbf{e}}_v + \frac{1}{l_w} \left( \frac{\partial\phi}{\partial w} \right) \hat{\mathbf{e}}_w, \quad (8.29)$$

que é a expressão para o gradiente em coordenadas curvilíneas arbitrárias. Por exemplo, para as coordenadas esféricas, a expressão 8.29 se torna

$$\nabla\phi = \left( \frac{\partial\phi}{\partial r} \right) \hat{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \right) \hat{\mathbf{e}}_\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \left( \frac{\partial\phi}{\partial\varphi} \right) \hat{\mathbf{e}}_\varphi. \quad (8.30)$$

Obter expressões para o divergente e o rotacional exige um estratégia um pouco mais sofisticada. Consideremos um ponto de coordenadas  $(u, v, w)$  e o conjunto de todos os pontos  $[u, u + du] \times [v, v + dv] \times [w, w + dw]$ . O volume da região ocupada por esse conjunto é exatamente o volume infinitesimal  $l_u l_v l_w du dv dw$ , discutido anteriormente. Na Figura 4 mostro uma representação desse conjunto, e indico as coordenadas dos oito pontos relevantes desse “paralelogramo” elementar. No painel superior, as setas em amarelo indicam a direção e sentido de incremento de cada uma das coordenadas, e em azul estão indicados o comprimento de cada um dos lados desse paralelogramo, isto é,  $l_u du$ ,  $l_v dv$  e  $l_w dw$ . A estratégia para obter uma expressão para o divergente é aplicar o Teorema da divergência de Gauss para um campo vetorial arbitrário  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(u, v, w)$  no volume infinitesimal  $\mathcal{V}$  definido por esses pontos. Isto é;

$$\oint_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{v} d^3x = (\nabla \cdot \mathbf{v}) l_u l_v l_w du dv dw, \quad (8.31)$$

onde, no último membro,  $(\nabla \cdot \mathbf{v})$  está sendo avaliado no ponto  $(u, v, w)$  e  $\partial\mathcal{V}$  denota a superfície fechada envolvendo  $\mathcal{V}$ . Você pode pensar que essa superfície é composta por 6 “faces”, se sorte que O fluxo de  $\mathbf{v}$  sobre  $\partial\mathcal{V}$  pode ser quebrado em três termos, um para cada par de faces, da maneira como segue. Duas dessas faces são perpendiculares à direção  $\hat{\mathbf{e}}_w$ , por exemplo, e o fluxo de  $\mathbf{v}$  sobre essas duas faces pode ser aproximado por

$$(v_w l_u l_v)|_{w+dw} du dv - (v_w l_u l_v)|_w du dv \approx \left[ dw \frac{\partial(v_w l_u l_v)}{\partial w} \right] du dv. \quad (8.32)$$

Fazendo o mesmo cálculo para os outros dois pares de faces, obtemos que

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) l_u l_v l_w du dv dw = \frac{\partial(v_u l_v l_w)}{\partial u} du dv dw + \frac{\partial(v_v l_u l_w)}{\partial v} du dv dw + \frac{\partial(v_w l_u l_v)}{\partial w} du dv dw. \quad (8.33)$$

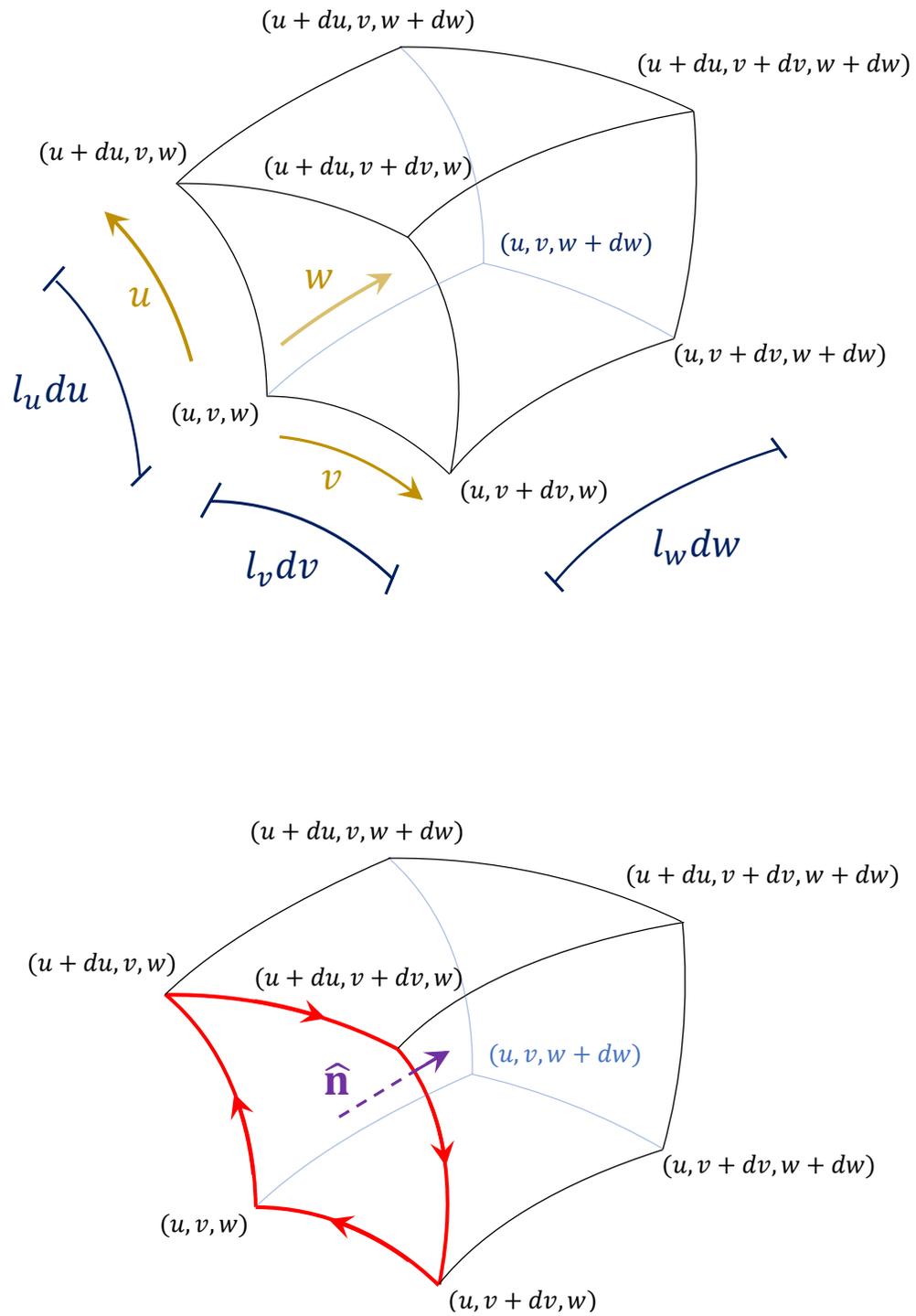


Figura 8.2: Volume infinitesimal em um sistema de coordenadas arbitrário, descrito pelas coordenadas  $(u, v, w)$ . As duas figuras são representações do mesmo conjunto de pontos, e foram divididas em dois painéis apenas para evitar poluições desnecessárias.

Ou seja,

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{l_u l_v l_w} \left[ \frac{\partial}{\partial u} (v_u l_v l_w) + \frac{\partial}{\partial v} (v_v l_u l_w) + \frac{\partial}{\partial w} (v_w l_u l_v) \right]. \quad (8.34)$$

A equação 8.34 é o divergente em coordenadas curvilíneas arbitrárias. Você pode utilizá-la, por exemplo, para checar que o divergente em coordenadas esféricas é dado por

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (v_\varphi). \quad (8.35)$$

Para o rotacional, a estratégia é de certa forma análoga, porém baseada no Teorema de Stokes. Como o rotacional - de um campo vetorial - é um vetor, nos concentramos primeiramente em uma de suas componentes. Para obtermos a componente  $(\nabla \times \mathbf{v})_w$ , por exemplo, consideramos a face delineada pela curva vermelha no painel inferior da Fig. 4, tal que a normal à face é  $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{e}}_w$ . O Teorema de Stokes aplicado a essa superfície  $\mathcal{S}$  é

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = (\nabla \times \mathbf{v})_w l_u l_v dudv, \quad (8.36)$$

onde  $\Gamma$  designa a curva fechada (linha vermelha) e  $l_u l_v dudv$  é o valor da área da superfície  $\mathcal{S}$ . A circulação de  $\mathbf{v}$  sobre  $\Gamma$  pode ser decomposto em quatro trechos, os quais dois estão na mesma direção do incremento da coordenada  $v$  e dois estão na mesma direção do incremento da coordenada  $u$ . Atenção para os sinais, que aqui são importantes. Assim sendo,

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} &= (v_u l_u)|_v du + (v_v l_v)|_{u+du} dv - (v_u l_u)|_{v+dv} du - (v_v l_v)|_u dv \\ &= [(v_v l_v)|_{u+du} dv - (v_v l_v)|_u dv] - [(v_u l_u)|_{v+dv} du - (v_u l_u)|_v du] \\ &\approx du \frac{\partial (v_v l_v)}{\partial u} dv - dv \frac{\partial (v_u l_u)}{\partial v} du. \end{aligned} \quad (8.37)$$

Logo,

$$(\nabla \times \mathbf{v})_w = \frac{1}{l_u l_v} \left[ \frac{\partial (v_v l_v)}{\partial u} - \frac{\partial (v_u l_u)}{\partial v} \right], \quad (8.38)$$

que pode ser generalizado para a expressão total;

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{v} &= \frac{1}{l_v l_w} \left[ \frac{\partial (v_w l_w)}{\partial v} - \frac{\partial (v_v l_v)}{\partial w} \right] \hat{\mathbf{e}}_u + \frac{1}{l_u l_w} \left[ \frac{\partial (v_u l_u)}{\partial w} - \frac{\partial (v_w l_w)}{\partial u} \right] \hat{\mathbf{e}}_v \\ &\quad + \frac{1}{l_u l_v} \left[ \frac{\partial (v_v l_v)}{\partial u} - \frac{\partial (v_u l_u)}{\partial v} \right] \hat{\mathbf{e}}_w. \end{aligned} \quad (8.39)$$

A equação 8.39 representa o rotacional em coordenadas curvilíneas arbitrárias. Você pode utilizá-la

para checar, por exemplo, que o rotacional em coordenadas esféricas é dado por

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{v} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\varphi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} \right] \hat{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta v_\varphi) \right] \hat{\mathbf{e}}_\theta \\ &+ \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \hat{\mathbf{e}}_\varphi. \end{aligned} \quad (8.40)$$

Por fim, vale a pena buscar uma forma de expressar o operador laplaciano  $\nabla^2$  no sistema de coordenadas arbitrário  $(u, v, w)$ . Na verdade, como já temos expressões para o gradiente e para o divergente, e sabemos que  $\nabla^2 \phi = \nabla \cdot (\nabla \phi)$  (6.i), podemos simplesmente combinar as duas expressões, obtendo

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{l_u l_v l_w} \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{l_v l_w}{l_u} \frac{\partial \phi}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{l_u l_w}{l_v} \frac{\partial \phi}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left( \frac{l_u l_v}{l_w} \frac{\partial \phi}{\partial w} \right) \right]. \quad (8.41)$$

Você fica convidada(o) a checar que, em coordenadas esféricas, por exemplo, o laplaciano é dado por

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}. \quad (8.42)$$

Calcule o divergente e o rotacional dos campos vetoriais abaixo, onde os três primeiros estão escritos em coordenadas esféricas e os três últimos em coordenadas cilíndricas.

(8.a)  $\mathbf{v} = r^n \hat{\mathbf{e}}_r$ , para  $n \in \mathbb{N}$ .

(8.b)  $\mathbf{v} = r^{-n} \hat{\mathbf{e}}_r$ , para  $n \in \mathbb{N}$  e  $n \neq 2$ .

(8.c)  $\mathbf{v} = r \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_r + r \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_\theta + r \sin \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_\varphi$

(8.d)  $\mathbf{v} = s^n \hat{\mathbf{e}}_s$ , para  $n \in \mathbb{N}$

(8.e)  $\mathbf{v} = s^{-n} \hat{\mathbf{e}}_s$ , para  $n \in \mathbb{N}$  e  $n \neq 1$ .

(8.f)  $\mathbf{v} = s(2 + \sin^2 \varphi) \hat{\mathbf{e}}_s + s \sin \varphi \cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_\varphi + 3z \hat{\mathbf{e}}_z$

Como um último exercício, mostre que um campo vetorial escrito em coordenadas esféricas do tipo  $\mathbf{v} = f(r) \hat{\mathbf{e}}_r$ , com  $f(r)$  uma função escalar derivável da coordenada  $r$ , sempre tem rotacional nulo.

## Seção 9

# O delta de Dirac

O delta de Dirac é uma *função especial* muitíssimo utilizada em Física e em distribuições. Em Eletromagnetismo a função delta é frequentemente usada para descrever densidades de cargas e correntes em casos que envolvem objetos pontuais, fios e planos infinitos, entre outros. Sua definição depende da dimensão de seu argumento. Em uma dimensão, o delta *unidimensional* é definido como

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \neq 0 \\ \infty, & \text{se } x = 0 \end{cases}, \quad (9.1)$$

munido também da propriedade

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1. \quad (9.2)$$

É possível que você esteja familiarizado com a função  $\delta(x)$ , mas vale a pena usar algumas linhas para discutir algumas propriedades úteis. Primeiramente, é uma espécie de abuso de linguagem dizer que  $\delta(0) = \infty$ , dado que isso foge da ideia formal de função. Por essa razão é possível que você veja o delta de Dirac sendo chamado de “função imprópria”, ou apenas de “distribuição”. Em segundo lugar, a função  $\delta(x)$  pode ser entendida como sendo um *pico*, infinitamente estreito, no ponto onde o argumento vale zero, e assumindo valor zero em qualquer outro ponto. Você pode encontrar na literatura maneiras de definir a função  $\delta(x)$  como um limite de uma família de distribuições, como distribuições gaussianas e/ou lorentzianas, quando a largura vai à zero mantendo-se sua integral igual a 1. Sobre a integral 9.2, temos, mais especificamente, que

$$\int_a^b \delta(x) dx = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \in [a, b] \\ 0, & \text{se } 0 \notin [a, b] \end{cases}, \quad (9.3)$$

ou seja, se o intervalo de integração contém o *pico*, a integral vale 1. Caso contrário a integral vale 0. Na verdade, há ainda uma “liberdade” - se é que podemos chamar assim - na definição caso um dos limites de integração seja 0 na integral 9.3. A saber, por vezes você encontrará que nesse caso a integral vale 1/2.

O delta unidimensional possui unidades de [comprimento]<sup>-1</sup>, de forma que a a integral 9.1 é uma quantidade adimensional. Esse fato será importante quando compararmos o delta unidimensional

com o delta em outras dimensões.

A função  $\delta(x - a)$ , para algum  $a$  real fixo, é uma translação do  $\delta(x)$ , definida como

$$\delta(x - a) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \neq a \\ \infty, & \text{se } x = a \end{cases}, \quad (9.4)$$

e munida também da mesma propriedade

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) dx = 1. \quad (9.5)$$

Interpreta-se  $\delta(x - a)$  como o “pico” característico da função delta de Dirac mas localizado em  $x = a$ , de forma que  $\delta(x)$  é apenas o caso particular  $a = 0$ . A integral 9.3 pode ser redefinida de acordo.

Uma das propriedades mais especiais de  $\delta$  é que, para qualquer função  $f(x)$  contínua em  $x = a$ , temos que

$$f(x)\delta(x - a) = f(a)\delta(x - a). \quad (9.6)$$

Essa propriedade é de certa forma análoga à propriedade (2.a) do delta de Kronecker. Ela pode ser entendida pelo argumento de que para qualquer  $x \neq a$ , ambos os lados são iguais a zero, enquanto que se  $x = a$  a igualdade é trivial. Uma consequência dessa propriedade é de que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - a) dx = f(a) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) dx = f(a). \quad (9.7)$$

A equação 9.7 sugere uma definição um pouco mais satisfatória para  $\delta$ . De fato, se uma função  $D(x, a)$  é tal que a igualdade

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)D(x, a) dx = f(a) \quad (9.8)$$

é válida para qualquer  $a$  e qualquer  $f$  contínua em  $x = a$ , então dizemos que  $D(x, a)$  se comporta como  $\delta(x - a)$ , e a igualdade  $D(x, a) = \delta(x - a)$  é legítima.

(9.a) Use as definições acima e a propriedade 9.8 para mostrar que

$$\delta(kx) = \frac{1}{|k|}\delta(x).$$

Use uma função teste  $f(x)$  qualquer e integre-a juntamente com  $\delta(kx)$ . Mostre por substituição de variáveis que o resultado é o mesmo que você obteria utilizando  $\delta(x)/|k|$  no lugar de  $\delta(kx)$ , e conclua a igualdade. Repare que você acabou de mostrar que, particularmente,  $\delta(-x) = \delta(x)$ .

(9.b) Ainda usando a mesma ideia (“se comporta como...”), mostre que a *derivada* da função  $\delta$  é um objeto que satisfaz

$$x \frac{d}{dx}(\delta(x)) = -\delta(x).$$

*Dica:* Use integração por partes.

(9.c) Seja  $\Theta(x)$  a função degrau (conhecida também como função de Heaviside), definida como

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}.$$

Mostre que

$$\delta(x) = \frac{d\Theta}{dx}.$$

(9.d) Mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{d\delta}{dx}(x-a) dx = -\frac{df}{dx}(a)$$

*Dica:* Use integração por partes.

## A função delta de Dirac tridimensional

Podemos generalizar a definição da função  $\delta$  para agir sobre elementos do  $\mathbb{R}^n$ . Os casos bidimensional e tridimensional são os interessantes para nós. Seja  $\mathbf{x}$  um vetor do  $\mathbb{R}^3$  de coordenadas  $(x_1, x_2, x_3)$ , o  $\delta(\mathbf{x})$  *tridimensional* é definido como

$$\delta(\mathbf{x}) = \delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3), \quad (9.9)$$

em que cada um dos três  $\delta$ 's do lado direito são unidimensionais. Uma notação comum para o delta de Dirac  $n$ -dimensional, para  $n > 1$ , é  $\delta^{(n)}$ . Nessa notação a definição acima seria escrita como

$$\delta^{(3)}(\mathbf{x}) = \delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3).$$

É importante ter em mente que essas notações existem e o que elas significam. Diversos textos na literatura utilizam notações diferentes. Deve ficar claro, porém, que a dimensão do  $\delta$  já fica imediatamente subentendida pela dimensão do seu argumento, de forma que a notação  $\delta^{(n)}$  raramente será utilizada - a menos que funções delta de diferentes dimensões estejam envolvidas simultaneamente na mesma expressão e haja a necessidade de diferenciá-las. No que segue discutiremos aspectos e propriedades do delta de Dirac tridimensional, mas generalizações para duas dimensões são perfeitamente válidas.

Seja  $\mathbf{a}$  um vetor fixo de coordenadas  $(a_1, a_2, a_3)$ . A partir de 9.9 a função  $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{a})$  pode ser definida como

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = \begin{cases} 0, & \text{se } \mathbf{x} \neq \mathbf{a} \\ \infty, & \text{se } \mathbf{x} = \mathbf{a} \end{cases}, \quad (9.10)$$

lembrando que a igualdade  $\mathbf{x} = \mathbf{a}$  é o mesmo que dizer que  $x_1 = a_1$ ,  $x_2 = a_2$  e  $x_3 = a_3$ . Analoga-

mente,  $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{a})$  satisfaz

$$\int_{\Omega} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}) d^3x = \begin{cases} 1, & \text{se } \mathbf{a} \in \Omega \\ 0, & \text{se } \mathbf{a} \notin \Omega \end{cases}. \quad (9.11)$$

Além disso, temos que

$$\phi(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = \phi(\mathbf{a})\delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \quad (9.12)$$

para qualquer campo escalar  $\phi$  e

$$\mathbf{v}(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = \mathbf{v}(\mathbf{a})\delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \quad (9.13)$$

para qualquer campo vetorial  $\mathbf{v}$ , o que imediatamente implicam que

$$\int_{\Omega} \phi(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}) d^3x = \begin{cases} \phi(\mathbf{a}), & \text{se } \mathbf{a} \in \Omega \\ 0, & \text{se } \mathbf{a} \notin \Omega \end{cases} \quad (9.14)$$

e

$$\int_{\Omega} \mathbf{v}(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}) d^3x = \begin{cases} \mathbf{v}(\mathbf{a}), & \text{se } \mathbf{a} \in \Omega \\ 0, & \text{se } \mathbf{a} \notin \Omega \end{cases}. \quad (9.15)$$

Diferente da função delta de Dirac unidimensional, o delta tridimensional possui dimensões de  $[\text{volume}]^{-1}$ , ou  $[\text{comprimento}]^{-3}$ . Isso fica bastante claro quando olhamos para a definição 9.9, onde cada um dos três deltas unidimensionais possuem dimensão de  $[\text{comprimento}]^{-1}$ . Isso é consistente com o fato de que o resultado da integral 9.11 deve ser um número adimensional. À título de ilustração, se estivéssemos lidando com o delta de Dirac em duas dimensões chegaríamos a conclusão que o mesmo deve ter dimensão de  $[\text{área}]^{-1}$ , ou  $[\text{comprimento}]^{-2}$ .

## Seção 10

# Um divergente especial

Você deve ter percebido que em alguns exercícios da seção 8 foi pedido que você desconsiderasse alguns casos pontuais. Por exemplo, no problema (8.b) excluiu-se o caso  $n = 2$ . Esta seção se dedica a tratar exatamente do campo

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{\hat{\mathbf{e}}_r}{r^2} = \frac{\mathbf{x}}{r^3} = \frac{x\hat{\mathbf{e}}_1 + y\hat{\mathbf{e}}_2 + z\hat{\mathbf{e}}_3}{[x^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}. \quad (10.1)$$

Na equação acima, o campo foi escrito de três formas equivalentes. A primeira,  $\hat{\mathbf{e}}_r/r^2$ , é a maneira de expressar  $\mathbf{F}$  em coordenadas esféricas. A segunda forma,  $\mathbf{x}/r^3$ , é equivalente à primeira pois  $\mathbf{x} = r\hat{\mathbf{e}}_r$ . A terceira e última forma é o campo  $\mathbf{F}$  expresso em coordenadas cartesianas.

O campo  $\mathbf{F}$  é especial pois dois motivos. O primeiro é sua importância em Eletromagnetismo, visto que ele aparece, por exemplo, em expressões para campos elétricos de cargas pontuais. Além disso, a segunda razão é que ele aparenta ter uma “inconsistência”, ou uma espécie de *problema*, quando tentamos computar seu divergente diretamente da equação 8.35. De fato, uma aplicação da equação 8.35 resultaria em  $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$  (cheque isso). Porém, vejamos o que ocorre quando consideramos o fluxo desse campo através de uma superfície (casca) esférica de raio  $R$  centrada na origem, a qual chamaremos de  $\mathcal{S}$ . A normal em cada ponto dessa superfície é orientada *para fora* da casca e pode ser escrito simplesmente como  $\hat{\mathbf{e}}_r$ . Dessa forma, o fluxo de  $\mathbf{F}$  sobre  $\mathcal{S}$  é<sup>1</sup>

$$\oint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\hat{\mathbf{e}}_r}{R^2} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r R^2 \sin \theta d\theta d\varphi = 4\pi. \quad (10.2)$$

Contudo, isso parece ser uma contradição sob a perspectiva do Teorema da divergência de Gauss. Vejamos com mais detalhes. Seja  $\Omega$  o conjunto delimitado pela superfície  $\mathcal{S}$ , definida acima. Se  $\nabla \cdot \mathbf{F}$  é de fato igual a 0 em todo lugar, *deveríamos* chegar a conclusão de que

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} d^3x = 0, \quad (10.3)$$

pois estamos integrando uma função identicamente nula. Por outro lado, o Teorema de Gauss

---

<sup>1</sup>Repare que o resultado independe de  $R$ .

impõe que

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} d^3x = \oint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 4\pi, \quad (10.4)$$

e é aqui que está a aparente contradição.

O Teorema da divergência não está errado, e o valor da integral volumétrica de  $\nabla \cdot \mathbf{F}$  é *de fato*  $4\pi$ . Essa é a resposta correta. Isso nos força a repensar a estrutura do campo escalar  $\nabla \cdot \mathbf{F}$ . A resposta para o problema está de certa maneira associada à indefinição de  $\mathbf{F}$  na origem  $r = 0$  (ou  $\mathbf{x} = 0$ ). Em outras palavras, de fato a igualdade  $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$  é *verdadeira* para todos os pontos, com exceção da origem. Estamos lidando, portanto, com um campo que é nulo para todo  $\mathbf{x} \neq 0$ , indefinido para  $\mathbf{x} = 0$  e que sua integral volumétrica sobre qualquer esfera centrada na origem vale  $4\pi$ . Isso sugere que

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 4\pi\delta(\mathbf{x}). \quad (10.5)$$

Essa é finalmente a resposta correta para o divergente de  $\mathbf{F}$ . Talvez você possa se incomodar com o fator  $4\pi$  na frente da função  $\delta(\mathbf{x})$ , pois ele aparece quando consideramos uma superfície esférica centrada na origem para calcularmos o fluxo em 10.2. A princípio você poderia se perguntar se esse fator seria ser outro se considerássemos uma superfície fechada *qualquer* que envolvesse a origem. Porém, o próprio Teorema da divergência nos garante que esse fator vai ser sempre  $4\pi$  independente da forma da superfície de integração. Inclusive, isto está no coração da forma integral da Lei de Gauss da Eletrostática. Note que se escrevêssemos  $\nabla \cdot \mathbf{F}$  como sendo igual a  $\alpha\delta(\mathbf{x})$ , a constante  $\alpha$  deve depender apenas da estrutura de  $\mathbf{F}$ , e não de superfícies de integração específicas. É por isso que quando calculamos o fluxo de  $\mathbf{F}$  sobre qualquer superfície fechada, a resposta será  $\alpha$  caso a superfície envolva a origem e 0 caso contrário. E isso, novamente, independe da forma da superfície (é uma propriedade da função delta de Dirac). O truque de usar uma superfície esférica centrada na origem é que nesse caso sabemos calcular o fluxo diretamente, e assim determinar o valor de  $\alpha$ .

(10.a) Considere  $\mathbf{x}'$  como um vetor *fixo* no espaço tridimensional e um campo vetorial  $\mathbf{F}$  definido por

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^3}. \quad (10.6)$$

Primeiramente, note que esse campo é equivalente ao campo definido em 10.1, mas com a origem deslocada de  $\mathbf{x}'$ . Agora, convença-se que nesse caso

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (10.7)$$

(10.b) Conclua que

$$\nabla^2 \left( \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \right) = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (10.8)$$

(10.c) Mostre, a partir do resultado acima, que a igualdade

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \right) = \frac{3(x_i - x'_i)(x_j - x'_j) - \delta_{ij} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^5} - \frac{4\pi}{3} \delta_{ij} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (10.9)$$

é válida para quaisquer  $i, j = 1, 2, 3$ .



## Seção 11

# Funções de dois pontos e aplicações selecionadas do cálculo diferencial e integral em Eletromagnetismo

Usaremos extensivamente várias das propriedades que você demonstrou nas seções 6 e 7. Nesta seção você obterá resultados que facilitarão a nossa vida no decorrer do curso. O operador  $\nabla$  é definido em termos das derivadas em relação às coordenadas do vetor posição. Porém, algumas funções a serem derivadas nos cálculos a seguir dependem simultaneamente de dois vetores posição, denotados, digamos, por  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x}'$ . É possível que, caso tenhamos que calcular, por exemplo,

$$\nabla \left( \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \right), \quad (11.1)$$

você se pergunte sobre quais coordenadas as derivadas deverão se dar. De fato, tanto a opção

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \right) \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \right) \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \right) \hat{k} \quad (11.2)$$

quanto

$$\frac{\partial}{\partial x'} \left( \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \right) \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y'} \left( \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \right) \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z'} \left( \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \right) \hat{k} \quad (11.3)$$

são operações possíveis e, para uma função em geral, são coisas diferentes (e significam coisas diferentes!). A primeira opção trata a função entre parêntesis como um campo cuja variável independente é  $\mathbf{x}$ , em que mantemos  $\mathbf{x}'$  como um vetor constante durante as derivações, enquanto que a segunda opção faz o contrário. Para evitar ambiguidades, sempre que estivermos lidando com esse tipo de função, dependente de dois pontos, o símbolo  $\nabla$  denotará o conjunto de derivadas com relação às coordenadas de  $\mathbf{x}$  e  $\nabla'$  denotará o conjunto de derivadas com relação às coordenadas de  $\mathbf{x}'$ . Tanto essas operações não são iguais que você notará, a partir dos problemas (7.a) e (7.b), que

$$\nabla \left( \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \right) = -\nabla' \left( \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \right). \quad (11.4)$$

Efetue os cálculos a seguir, expressando os resultados em termos de  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x}'$ . Sempre que possível, utilize resultados das seções 3 e 6, além de qualquer outra propriedade discutida nestas notas que possa ser conveniente. Perceba que alguns dos itens podem se beneficiar de itens anteriores e procure não refazer nenhuma conta. Considere que  $\alpha$  é um número real positivo.

(11.a)

$$\nabla \left( \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^\alpha} \right) \quad (11.5)$$

(11.b)

$$\nabla' \left( \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^\alpha} \right) \quad (11.6)$$

(11.c)

$$\nabla \left( \frac{\rho(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^\alpha} \right), \rho \text{ é um campo escalar derivável.} \quad (11.7)$$

(11.d)

$$\nabla \left( \frac{\rho(\mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^\alpha} \right), \rho \text{ é um campo escalar derivável.} \quad (11.8)$$

(11.e)

$$\nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^\alpha} \right), \mathbf{J} \text{ é um campo vetorial derivável.} \quad (11.9)$$

(11.f)

$$\nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^\alpha} \right), \mathbf{J} \text{ é um campo vetorial derivável.} \quad (11.10)$$

(11.g)

$$\nabla' \cdot \left( \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^\alpha} \right), \mathbf{J} \text{ é um campo vetorial derivável.} \quad (11.11)$$

(11.h)

$$\nabla' \cdot \left( \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^\alpha} \right), \mathbf{J} \text{ é um campo vetorial derivável.} \quad (11.12)$$

(11.i) Mostre que, para qualquer função escalar de dois pontos do tipo  $f = f(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|)$ , sempre é

verdade que

$$\nabla \times [(\mathbf{x} - \mathbf{x}')f(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|)] = 0, \quad (11.13)$$

e use isso para calcular expressões para os quatro itens abaixo. Por simetria, isso é o mesmo que mostrar que

$$\nabla' \times [(\mathbf{x} - \mathbf{x}')f(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|)] = 0, \quad (11.14)$$

*Sugestão:* Faça uma mudança de coordenadas que coloque a origem sobre  $\mathbf{x}'$  e calcule o rotacional em coordenadas esféricas.

(11.j)

$$\nabla \times \left( \frac{\rho(\mathbf{x}')(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^\alpha} \right), \quad \rho \text{ é um campo escalar derivável.} \quad (11.15)$$

(11.k)

$$\nabla' \times \left( \frac{\rho(\mathbf{x}')(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^\alpha} \right), \quad \rho \text{ é um campo escalar derivável.} \quad (11.16)$$

(11.l)

$$\nabla \times \left( \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^3} \right), \quad \mathbf{J} \text{ é um campo vetorial derivável} \quad (11.17)$$

(11.m)

$$\nabla^2 \left( \frac{\rho(\mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^\alpha} \right), \quad \rho \text{ é um campo escalar derivável.} \quad (11.18)$$



# Referências

- [1] Griffiths, D. J. (2013) *Introduction to Electrodynamics*, 4th Ed., Cambridge University Press, Cambridge.
- [2] Jackson, J. D. (1999) *Classical Electrodynamics*, 3rd Ed., Wiley, New York, NY.
- [3] Zangwill, A. (2012) *Modern Electrodynamics*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [4] Reitz, J. R., Milford, F.J. and Christy, R.W. (1993) *Foundations of Electromagnetic Theory*, 4th Ed., Addison-Wesley, Reading, MA.
- [5] Feynman, R. P., Leighton, R. B., Sands, M. (1963). *The Feynman Lectures on Physics*, vol. II, Addison-Wesley, Reading, MA.
- [6] Apostol, T. M., (1967) *Calculus*, vol. I, 2nd Ed., John Wiley & Sons.
- [7] Apostol, T. M., (1969) *Calculus*, vol. II, 2nd Ed., John Wiley & Sons.