

Instabilidades Não-Lineares na Propagação de Chamas em Canais

Domingos H, U. Marchetti

IFUSP – Curso de Verão – 2007

Equações de Euler (para fluido incompressível não viscoso em dimensão $d = 2$)

Equação da continuidade (densidade constante em domínios):

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

Conservação de momento (aproximação de Bussenesq):

$$\rho (\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) = -\nabla p + \rho \mathbf{g}$$

$\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $u_i = u_i(t, x, y)$ campo de velocidade, $\mathbf{g} = (0, -g)$ campo gravitacional e p pressão

Modelo Hidrodinâmico – Darrieus (1938) e Landau (1944)

Espessura da chama l desprezível comparado com as dimensões de comprimento L do sistema.

Chama modelada por uma curva

$$y = \phi(t, x), \quad 0 < x < L$$

separando o fluido combustível dos resíduos formados por sua queima.

Cada região V^+ e V^- separada pela curva possui densidade constante

$$\rho = \begin{cases} \rho^+ = \frac{1}{1-\gamma} & \text{se } y > \phi(t, x) \\ \rho^- = 1 & \text{se } y < \phi(t, x) \end{cases}$$

com $\gamma = 1 - \frac{\rho_-}{\rho_+}$. O combustível é mais denso antes da queima se $0 < \gamma \leq 1$ e, por estar sobre o fluido residual, a chama sofre a ação da gravidade. Veremos que a chama é afetada também por fatores puramente hidrodinâmicos (instabilidade de Darrieus–Landau)

Geometria da Curva

Família de curvas parametrizadas pela variável x :

$$\{\gamma(t, x) = (x, \phi(t, x)), \quad 0 < x < L\}_{t \geq 0}$$

Vetor tangente à curva

$$\mathbf{T} = \frac{\gamma'}{|\gamma'|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\phi')^2}} (1, \phi')$$

(f' significa derivada de f com respeito a x)

Vetor normal à curva

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\phi')^2}} (-\phi', 1)$$

obtido pelas equações $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} = 0$ e sinal tal que aponte em direção a V_+

Curvatura de Gauss

$$K = \frac{1}{1 + (\phi')^2} \phi''$$

é a constante de proporcionalidade $K = K(t, x)$ na relação $\mathbf{T}' = K \mathbf{n}$. Note que o vetor tangente $\mathbf{T}$ é normalizado $|\mathbf{T}| = 1$ e, portanto, sua derivada com respeito a x aponta na direção normal

Velocidade normal da chama

$$D = \mathbf{n} \cdot \dot{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\phi')^2}} \dot{\phi}$$

($\dot{f}$ significa derivada de f com respeito a t) com respeito ao sistema de referência. Adotaremos um sistema de referência no qual a chama plana

$$\phi(t, x) = C, \quad 0 < x < L$$

permanece parada em $y = 0$, i. e. $\phi \equiv 0$

Condições de Rankine–Hugoniot

Fluxo de massa através da interface:

$$[\rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - D)]_-^+ \equiv 0$$

Fluxo de momento através da interface:

$$[\rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - D) + p \mathbf{n}]_-^+ \equiv 0$$

$[f]_-^+ = f_+ - f_-$ é a diferença do valor da função quando se aproxima da curva γ por cima e por baixo

$$f_{\pm}(t, x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(t, x, \phi(t, x) \pm \varepsilon)$$

Condições de Impermeabilidade das Paredes do Canal

$$u_1(t, 0, y) = u_1(t, L, y) = 0, \quad t \geq 0, \quad -\infty < y < \infty$$

$$\phi'(t, 0) = \phi'(t, L) = 0, \quad t \geq 0$$

a componente transversal da velocidade u_1 e curva ϕ satisfazem, resp., a condição 0–Dirichlet e Neumann na fronteira

Lei Cinemática

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - D)|_+ = -u_L(1 + \mathcal{L}K)$$

Interpretação: cada ponto x da chama se propaga na direção normal com uma velocidade u_L corrigida por um fator devido a curvatura K . A velocidade da chama é a velocidade do fluido combustível em relação a frente de propagação. $\mathcal{L}$ é o comprimento de Markstein.

Lei cinética combinada com o fluxo de massa resulta

$$[\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}]_-^+ \equiv \frac{\gamma}{1 - \gamma} u_L(1 + \mathcal{L}K) \quad (1)$$

Pressão Reduzida

$$q = p + \rho g y$$

Note que $-\nabla q = -\nabla p + \rho g(0, -1) = -\nabla p + \rho \mathbf{g}$ elimina o termo gravitacional na equação de conservação de momentos:

$$\rho(\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) = -\nabla q$$

e satisfaz

$$[q]_-^+ = [p]_-^+ - g[\rho y]_-^+ = [p]_-^+ + \frac{\gamma g}{1 - \gamma} \phi$$

Chama Plana Estacionária $\phi \equiv 0$

$$\bar{\mathbf{u}}(x, y) = \begin{cases} (0, -u_L) & \text{se } y > 0 \\ (0, -u_L/(1 - \gamma)) & \text{se } y < 0 \end{cases}$$

$$\bar{q}(x, y) = \begin{cases} q_L & \text{se } y > 0 \\ q_L - \gamma u_L^2/(1 - \gamma)^2 & \text{se } y < 0 \end{cases}$$

resolve as equações de Euler sujeitas as condições de Rankine–Hugoniot juntamente com a lei cinética

Pequenos Desvios à Chama Plana Seja

$$\mathbf{u}(t, x, y) = \bar{\mathbf{u}}(y) + \alpha^2 \mathbf{U}(t, x, y)$$

$$q(t, x, y) = \bar{q}(y) + \alpha^2 Q(t, x, y)$$

uma solução das equações hydrodinâmicas de Euler que desvia α^2 da solução estacionária, $\mathbf{U} = (U_1, U_2)$

Hipóteses de escala: $\alpha = \frac{\gamma g}{1 - \gamma} \ll 1$, $\mathcal{L}/\alpha = O(1)$ (constante de Markstein $\text{Ma} = \mathcal{L}/l = 1 + \text{le}/2$ no limite $\gamma \rightarrow 0$)

$$\tau = \alpha t$$

$$\phi(t, x) = -\alpha \theta\left(\tau, \frac{\pi}{L} x\right)$$

A lei cinética escrita nas quantidades geométricas

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1 + (\phi')^2}} \left(u_2^+ - u_1^+ \phi' - \dot{\phi} \right) &= -u_L \left(1 + \mathcal{L} \frac{\phi''}{1 + (\phi')^2} \right) \\ \sqrt{1 + (\phi')^2} \left(u_2^+ - u_1^+ \phi' - \dot{\phi} \right) &= -u_L \left(1 + (\phi')^2 + \mathcal{L} \phi'' \right)\end{aligned}$$

tem o lado esquerdo, na ordem dominante,

$$\left(1 + \frac{1}{2} \alpha^2 \frac{\pi^2}{L^2} (\theta')^2 + o(\alpha^2) \right) \left(-u_L + \alpha^2 U_2^+ + \alpha^2 \dot{\theta} + o(\alpha^2) \right)$$

e o lado direito

$$-u_L \left(1 + \alpha^2 \frac{\pi^2}{L^2} (\theta')^2 - \alpha^2 \frac{\pi^2 \mathcal{L}}{\alpha L^2} \theta'' \right)$$

resultando em uma equação a derivadas parciais não-linear (em unidades apropriadas)

$$\theta_t = \varepsilon \theta_{xx} - \frac{1}{2} \theta_x^2 + \frac{2u_L}{1 - \gamma} U_2^+$$

definida no intervalo $[0, \pi]$ com condições de impermeabilidade nas fronteiras do canal

$$\theta_x(t, 0) = \theta_x(t, \pi) = 0$$

Equações Satisfeitas pelo Desvio (na ordem dominante)

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y} = 0$$

$$\rho (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\nabla Q$$

com $\rho \bar{\mathbf{u}} = (0, -u_L/(1 - \gamma))$ é válida para todo $y \in \mathbb{R}$, concluimos

$$\frac{u_L}{1 - \gamma} \frac{\partial U_1}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\frac{u_L}{1 - \gamma} \frac{\partial U_2}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial y}$$

sujeita, por hipótese, as condições

$$[U_i]_-^+ = 0, \quad i = 1, 2$$

$$[Q]_-^+ = \theta$$

sendo o lado esquerdo destas equações em $y = 0$; $\lim_{y \rightarrow \pm\infty} U_i^\pm = 0$, $\lim_{y \rightarrow \pm\infty} Q^\pm = 0$ e

$$U_1(t, 0, y) = U_1(t, \pi, y) = 0$$

A solução θ é da forma

$$\theta(t, x) = \theta_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n(t) \cos nx$$

$(\theta_n)_{n \geq 0}$ reais com $\theta_0(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \theta(t, x) dx := \bar{\theta}(t)$ e expansões análogas para as funções $U_i^\pm(t, x, y)$ e $Q^\pm(t, x, y)$.

Considere a função analítica

$$W(t, z) = \frac{1}{4} \sum_{n \geq 1} \theta_n(t) e^{inz}, \quad z = x + iy$$

e note que

$$Q^+(t, x, y) = W(t, z) + \overline{W(t, z)} = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \theta_n(t) e^{-ny} \cos nx$$

$$Q^-(t, x, y) = -\left(W(t, \bar{z}) + \overline{W(t, \bar{z})}\right) = \frac{-1}{2} \sum_{n \geq 1} \theta_n(t) e^{ny} \cos nx$$

satisfaz as condições de contorno em γ e em $y = \pm\infty$

$$U_2^+ + iU_1^+ = \frac{2(1-\gamma)}{u_L} W$$

$$-U_2^- + iU_1^- = \frac{1-\gamma}{u_L} (2W - \theta + \bar{\theta})$$

também satisfaz as equações correspondentes. Tomando a parte real da primeira equação

$$\frac{2u_L}{1-\gamma} U_2^+ = \theta - \bar{\theta}$$

A equação de Rakib–Sivashinsky

$$\theta_t = \varepsilon \theta_{xx} - \frac{1}{2} \theta_x^2 + \theta - \bar{\theta}$$

para o perfil de chama ascendente em canal, sob a ação da gravidade, é válida no regime de fraca expansão térmica

$$\delta = \frac{\gamma g L}{(1-\gamma) u_L^2} \ll 1$$

Experimentalmente tem-se $\gamma = 0.8$, $g = 1000 \text{ cm/s}^2$, $L = 5 \text{ cm}$ e $u_L = 500 \text{ cm/s}$, resultando $\delta = 0.08$

Separação de Variáveis

Parametrizando o desvio da chama plana por

$$\mathbf{U} = \phi(t, x) \mathbf{w}(y)$$

$$Q = \phi(t, x) r(y)$$

com $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$

$$\phi(t, x) = e^{st+ikx}$$

obtemos da equação de continuidade e conservação de momento, em ordem dominante,

$$\phi' w_1 + \phi w_2' = (ikw_1 + w_2') \phi = 0$$

$$\rho \phi \mathbf{w} - \frac{u_L}{1-\gamma} \phi \mathbf{w}' = -(\phi' r, \phi r')$$

que reduzem a

$$ikw_1 = -w_2'$$

$$\rho s w_1 - \frac{u_L}{1-\gamma} w_1' = -ikr$$

$$\rho s w_2 - \frac{u_L}{1-\gamma} w_2' = -r'$$

multiplicando a segunda por ik e usando a primeira

$$-\rho s w_2' + \frac{u_L}{1-\gamma} w_2'' = k^2 r$$

que ao ser derivada e substituída na terceira, resulta

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right) \left(\rho s w_2 - \frac{u_L}{1-\gamma} w_2' \right) = 0$$

A solução em ordem dominante é da forma

$$w_2(y) = \begin{cases} w_{2,0}^+ \exp(-ky) & \text{se } y > 0 \\ (w_{2,0}^- - c) \exp(ky) + c \exp((1-\gamma)sy/u_L) & \text{se } y < 0 \end{cases}$$

devido a condição $\lim_{y \rightarrow \pm\infty} w_2(y) = 0$. Acrescentando, em ordem dominante (veja eq. (1))

$$[w_2]_-^+ = 0$$

$$-ik[w_1]_-^+ = [w_2']_-^+ = -u_L \frac{\gamma}{1-\gamma} k^2$$

$$[r]_-^+ = 0$$

obtemos $w_{2,0}^+ = w_{2,0}^- = w_0$

$$2kw_0 - \left(k - \frac{1-\gamma}{u_L} s \right) c = u_L \frac{\gamma}{1-\gamma} k^2$$

$$(2-\gamma)skw_0 - \left(k - \frac{1-\gamma}{u_L} s \right) sc = -\frac{u_L}{1-\gamma} \left(k^2 - \frac{(1-\gamma)^2}{u_L^2} s^2 \right) c$$

e, sob a hipótese provisória $c \ll w_0$

$$((2 - \gamma)s + 2ku_L) w_0 = u_L^2 \frac{\gamma}{1 - \gamma} k^2$$

Temos ainda, da lei cinética

$$s = w_{2,0}^+$$

e a relação de dispersão estabelecida por Landau (1944) por argumentos dimensionais

$$s = u_L k \Omega(\gamma)$$

Substituindo estas duas expressões na equação acima, temos

$$(2 - \gamma)\Omega^2 + 2\Omega - \frac{\gamma}{1 - \gamma} = 0$$

cujas raízes positivas

$$\Omega = \frac{1}{2 - \gamma} \left(\sqrt{1 + \frac{\gamma(2 - \gamma)}{1 - \gamma}} - 1 \right) = \frac{\gamma}{2} + O(\gamma^2)$$

para γ pequeno, expressa instabilidade linear de Darrieus–Landau da chama plana de origem hidrodinâmica. Note $s \ll u_L k$ justifica a posteriori a hipótese $c \ll w_0$

Operador de Darrieus–Landau A dispersão linear introduz na equação para o perfil da chama um termo da forma multiplicação por $|k| = \sqrt{k^2}$ no espaço de Fourier

$$I(e^{iky}) = |k| e^{iky}$$

$(I(\phi) = -\mathcal{H}(\phi'))$ é um operador não local dado por menos a transformada de Hilbert da derivada)

Ação da Gravidade Quando $g \neq 0$, a pressão reduzida difere da pressão. Temos $[q]_-^+ = [p]_-^+ + \frac{\gamma g}{1 - \gamma} \phi$

$$[r]_-^+ = \frac{\gamma g}{1 - \gamma}$$

de onde se deduz

$$((2 - \gamma)s + 2ku_L) w_0 = u_L^2 \frac{\gamma}{1 - \gamma} k^2 + \gamma g k$$

Pela relação de dispersão de Landau

$$s = u_L k \Omega(\gamma, \frac{\gamma g}{u_L^2 k})$$

$$(2 - \gamma)\Omega^2 + 2\Omega - \frac{\gamma}{1 - \gamma} - \frac{\gamma g}{u_L^2 k} = 0$$

tem solução positiva dada por

$$\Omega = \frac{1}{2 - \gamma} \left(\sqrt{1 + \frac{\gamma(2 - \gamma)}{1 - \gamma} + \frac{\gamma g(2 - \gamma)}{u_L^2 k}} - 1 \right)$$

Se a ação da gravidade é a instabilidade dominante, então temos uma relação de dispersão

$$s = \frac{\gamma g}{2u_L}$$

para $k \neq 0$, mas para k próximo de 0, $s = s(k)$ vai a 0 como $\sqrt{k}$

Duas Equações de Sivashinsky

Equação de Rakib–Sivashinsky governa o limite de expansão térmica ($\gamma \ll 1$) para o perfil $y = \phi(t, x)$, $0 < x < \pi$ de uma chama ascendente propagando em um canal

$$\phi_t = \varepsilon \phi_{xx} - \frac{1}{2} \phi_x^2 + \phi - \bar{\phi},$$

$\varepsilon > 0$ proporcional ao comprimento de Markstein $\mathcal{L}$ com condition de contorno (adiabática): $\phi_x(t, 0) = \phi_x(t, \pi) = 0$.

Perfis parabolóides centrados no canal são observados permanecerem “estáveis” por longo tempo e eventualmente sua ponta desliza para a parede do canal (metaestabilidade)

A equação de Michelson–Sivashinsky

$$\phi_t = \varepsilon \phi_{xx} - \frac{1}{2} \phi_x^2 + I(\phi)$$

não sofre a ação da gravidade mas, devido a instabilidade de Darrieus–Landau

$$\phi - \bar{\phi} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \cos[k(x-y)] \phi(t, y) dy$$

é substituído por

$$I(\phi)(t, x) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} k \int_{-\pi}^{\pi} \cos[k(x-y)] \phi(t, y) dy$$

Perfis Estacionários da Eq. de Rakib–Sivashinsky (RS) Se ϕ é uma solução da eq. de RS então $u = \phi_x$ satisfaz

$$u_t = \varepsilon u_{xx} - u u_x + u$$

com condição de fronteira de Dirichlet $u(t, 0) = u(t, \pi) = 0$. A solução ϕ da equação original é dada por

$$\phi(t, x) = \theta(t, x) - \int_0^t (\bar{\theta}(\tau) - \varepsilon \theta_{xx}(\tau, 0)) d\tau$$

$$\theta(t, x) = \int_0^x u(t, y) dy$$

Considere o problema de equilíbrio

$$\varepsilon v'' - v v' + v = 0, \quad 0 < x < \pi \quad \text{com} \quad v(0) = v(\pi) = 0$$

O perfil da chama estacionária

$$\phi^{\text{estacionária}}(t, x) = \vartheta(x) - Vt$$

$$V = \bar{\vartheta} - \varepsilon \vartheta''(0) = \frac{1}{2} \overline{v^2}$$

$$\vartheta(x) = \int_0^x v(y) dy$$

A solução de equilíbrio é obtida a partir do sistema dinâmico: $p = v$, $w = v'$

$$w' = \frac{1}{\varepsilon} p (w - 1)$$

$$p' = w$$

Integrando

$$\frac{dp}{dw} = \frac{\varepsilon w}{p(w-1)} \implies p^2 = 2\varepsilon \left(w - w_0 + \ln \frac{1-w}{1-w_0} \right)$$

temos uma família a um parâmetro $w_0 \geq 0$ de órbitas periódicas. Aquelas com período $\frac{2\pi}{p}$, $p = 1, 2, \dots$, estão relacionadas com a solução de equilíbrio tomando sua projeção no eixo p

Estabilidade das Soluções Estacionárias Substituindo

$$u(t, x) = v(x) + \zeta(t, x)$$

na equação para $u = \phi_x$

$$\zeta_t = L[v]\zeta + \zeta\zeta_x$$

$$L[v]\xi = \varepsilon \xi'' - v\xi' + (1 - v')\xi$$

Atuando sobre funções $\xi(x)$ satisfazendo $\xi(0) = \xi(\pi) = 0$, $L[v]$ é um operador linear auto-adjunto com respeito ao produto interno $(\xi, \eta)_\rho = \int_0^\pi \xi(x) \eta(x) \exp \left(-\varepsilon^{-1} \int_0^x v(y) dy \right) dx$ com peso ρ que permite empregar a teoria de Sturm-Liouville para determinar propriedades sobre o espectro

Para $v = v_0 \equiv 0$ as autofunções de L são $\sin kx$ e $\cos kx$, $k = 1, 2, \dots$. Os autovalores são

$$\begin{aligned} L[0] \cos kx &= \varepsilon (\cos kx)'' + \cos kx \\ &= (-\varepsilon k^2 + 1) \cos kx \\ &= \lambda_k \cos kx \end{aligned}$$

Se $\varepsilon > 1$, todos autovalores λ_k , $k = 1, 2, \dots$, são negativos e a solução estacionária correspondente a uma chama plana é estável. Se $\varepsilon < 1$ alguns modos normais tornam-se instáveis ($\lambda_k > 0$, $k = 1, \dots, k_0$) e a solução da chama plana é instável. Pode-se mostrar que a solução $v_1(x)$ que bifurca a partir da solução v_0 em $\varepsilon = 1$ é a única solução estável para todo $\varepsilon < 1$. Esta solução

corresponde a uma frente semi-parabólica com a ponta encostada em uma das paredes do canal. A solução estacionária $v_2(x)$ de perfil parabólico com o ponto de máximo centrado no canal é instável

Transiente de Quasi-Equilíbrio (Metaestabilidade) Perfis de chama de formato de um parabolóide com máximo centrado no canal são observados, experimentalmente e por simulação computacional, permanecerem estáveis por um tempo muito longo. Eventualmente a ponta do parabolóide desliza para a parede.

Soluções de quasi-equilíbrio satisfazem a equação de RS com um erro exponencialmente pequeno $O(e^{-\alpha/\varepsilon})$

$$u^{\text{qe}}(x) = U_0(x, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{\pi - x}{\varepsilon}) + \varepsilon U_1(x, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{\pi - x}{\varepsilon}) + \dots$$

$$U_0(a, b, c) = f(a) + g(b) + h(c)$$

com f uma solução da equação não satisfazendo a condição de fronteira; g e h corrigem a condição em uma estreita faixa próxima a fronteira

$$f(x) = x - x_0$$

$$g(x) = \frac{2x_0 e^{-x_0 x}}{1 + e^{-x_0 x}} = x_0 \left(1 - \tanh \frac{x_0 x}{2}\right) \equiv t(x_0, x)$$

$$h(x) = \frac{-2(\pi - x_0) e^{-(\pi - x_0)x}}{1 + e^{-(\pi - x_0)x}} = -t(\pi - x_0, x)$$

U_i tem a mesma forma porém envolve o parâmetro x_i , $0 < x_i < \pi$, arbitrário, escolhido de forma que u^{qe} satisfaça a equação com um erro menor que ε^N para qualquer potência

Perfis Estacionários da Eq. de Michelson–Sivashinsky (MS) Se ϕ é uma solução da eq. de MS então $u = \phi_x$ satisfaz

$$u_t = \varepsilon u_{xx} - u u_x + I(u)$$

com condição de fronteira de Dirichlet $u(t, 0) = u(t, \pi) = 0$. Esta equação admite soluções da forma

$$u(t, x) = \varepsilon \sum_{k=1}^{2N} \cot \left(\frac{x - z_k(t)}{2} \right)$$

onde os polos $z_j(t) = x_j(t) + y_j(t)$ ocorrem em pares, complexo conjugado um do outro, e satisfazem o sistema dinâmico

$$\dot{z}_j = -\varepsilon \sum_{l \neq j} \cot \left(\frac{z_j - z_l}{2} \right) - i \frac{y_j}{|y_j|}, \quad j = 1, \dots, 2N$$

As soluções de equilíbrio tem polos alinhados paralelos ao eixo imaginário. O número de polos em cada solução e o número de alinhamentos depende do parâmetro ε . A solução mais estável é aquela que alinha o maior número possível de pólos no eixo imaginário (mono-coalescentes)

Não se sabe ainda se esta equação admite soluções quasi-estacionárias. Há uma contradição entre a dinâmica gerada pela integração numérica da equação e os teoremas sobre estabilidade das soluções coalescentes. O perfil mais estável é suave e semelhante a uma semi-parábola com o máximo em uma das paredes. A simulação periódica indica um comportamento caótico do perfil. Atribuímos esta discrepância à proliferação de soluções metaestáveis

Referências:

G. Joulin & P. Vidal “An introduction to the instability of flames, shocks and detonations”, em *Hydrodynamics and nonlinear instabilities*, ed. C. Godrèche e P. Manneville

L. F. Guidi & D. H. U. Marchetti “A comparison analysis of Sivashinsky’s type evolution equations describing flame propagation in channels”, *Phys. Lett. A* **308**, 162-172 (2003)