

Mecânica Quântica I (4300403)

Prof. Sylvio Canuto

Lista de exercícios 3

1. Verifique que $[L_x, L_y] = i\hbar L_z$. Obtenha também $[L_y, L_z]$, $[L_z, L_x]$ e $[L^2, L_i]$ onde $(i = x, y, z)$.

2. Definindo $L_{\pm} = L_x \pm iL_y$, verifique que

$$[L^2, L_{\pm}] = 0 \quad \text{e} \quad [L_z, L_{\pm}] = \pm\hbar L_{\pm}$$

3. Verifique que $L_i^{\dagger} = L_i$ e $L_{\pm}^{\dagger} = L_{\mp}$.

4. Verifique que $L_{\pm}L_{\mp} = L^2 - L_z^2 \pm \hbar L_z$.

5. Se $\phi_{l,m} = |lm\rangle$ são autovalores de L^2 e L_z com:

$$L^2|lm\rangle = \hbar^2 l(l+1)|lm\rangle \quad \text{e} \quad L_z|lm\rangle = \hbar m|lm\rangle \quad (1)$$

normalizados, isto é $\langle lm|lm'\rangle = \delta_{mm'}$, verifique que $|lm\pm 1\rangle$ normalizado é dado por

$$|lm\pm 1\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{l(l+1) - m(m\pm 1)}} L_{\pm}|lm\rangle \quad (2)$$

6. Um rotor rígido simétrico tem hamiltoniano $H = \frac{L^2}{2I}$ onde I é o momento de inércia. Quais são os níveis de energia (autovalores) e os estados correspondentes? Para cada nível de energia, qual é a degenerescência?

7. Dado $Y_{2,1}(\theta, \phi) = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cos\theta \sin\theta e^{i\phi}$, obtenha $Y_{2,2}$ e $Y_{2,0}$ aplicando os operadores L_+ e L_- com as normalizações corretas.

8. Encontre a matriz que representa L_x para uma partícula de momento angular $l = 1$ (usando a base de autoestados de L_z). Determine os autovalores de L_x .

9. Mostre que se um operador comuta com duas componentes do momento angular então ele também comuta com a terceira.

10. Verifique que as matrizes de Pauli satisfazem

i $\vec{\sigma} \times \vec{\sigma} = 2i\vec{\sigma}$

ii $\sigma_x\sigma_y = -\sigma_y\sigma_x$

11. Obtenha as expressões dos operadores L_x, L_y, L_z e L^2 em coordenadas polares esféricas. A partir destes operadores, construa L_+ e L_-