4300403 - Mecânica Quântica I

1º Semestre de 2011 (Noturno)

1ª Lista de Exercícios

Prof. Sylvio Canuto

1) Considere uma partícula de massa m submetida a um campo central $V(r) = -\alpha/r$ (problema de Kepler; veja Goldstein "*Classical Mechanics*").

i) Mostre que a sua trajetória é uma cônica $\frac{p}{r} = 1 + \in \cos\theta$ onde $p = M^2/m\alpha$ onde M é o momento angular e $\in$ é a excentricidade dada por $\in^2 = 1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}$ onde E é a energia.

ii) Verifique que a solução é um círculo para $E_0 = -\frac{m\alpha^2}{2M^2}$.

iii) Verifique que a solução é uma elipse para $E_0 < E < 0$.

2) Utilize a quantização de Wilson-Sommerfeld e obtenha os níveis de energia do oscilador harmônico unidimensional. Qual a energia do estado fundamental?

3) Utilizando a quantização de Wilson-Sommerfeld para o átomo de hidrogênio discuta os níveis de energia degenerados e as correspondentes trajetórias clássicas (círculo ou elipse) para o segundo estado excitado (n =3).

- *Os exercícios seguintes servem ao propósito de encaminhá-lo a algumas funções matemáticas que serão usadas ao longo do curso. Você pode estudar no livro do G. Arfken "Mathematical Methods for Physicists", Acad. Press ou em outro livro do seu interesse.*

4) Os polinômios de Hermite $H_n(x)$ são a solução da equação diferencial $H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0$.

Verifique que:

i) $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$, $\mathrm{H}_2(x) = 4x^2 - 2$.

ii) eles satisfazem as relações de recorrência:

$$xH_n(x) = nH_{n-1}(x) + \frac{1}{2}H_{n+1}(x)$$

$$H_n^{'}(x) = 2nH_{n-1}(x)$$

5) Verifique que os polinômios associados de Legendre $P_\ell^m(\cos\theta)$ são a solução da equação diferencial

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{d}{d\theta}P_\ell^m\right)+\left[\ell(\ell+1)-\left(\frac{m}{\operatorname{sen}\theta}\right)^2\right]P_\ell^m=0$$

$$\begin{aligned}
&P_\ell^m(\cos\theta):\\
&P_1^1 = \operatorname{sen}\theta\\
&P_1^0 = \cos\theta\\
&P_2^1 = 3\cos\theta\operatorname{sen}\theta
\end{aligned}$$

Normalizado:

$$\mathcal{P}_\ell^m(\cos\theta)=\sqrt{\frac{2\ell+1}{2}\cdot\frac{(\ell-|m|)!}{(\ell+|m|)!}}\ \mathrm{P}_\ell^m(\cos\theta)$$

6) Os esféricos harmônicos são definidos como $Y_\ell^m(\theta,\varphi)=\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{P}_\ell^m(\cos\theta)e^{im\varphi}$, sendo que $\varepsilon=\begin{cases}(-1)^m & se\ m\geq 0;\\ 1 & se\ m\leq 0.\end{cases}$

Obtenha Y_0^0, Y_1^0, Y_1^1, Y_1^{-1} e Y_2^0.

7) Os polinômios de Legendre $L_n(x)$ são definidos pela equação diferencial de Sturm-Liouville

$$\left(\frac{d}{dx}\left(p\frac{d}{dx}\right)+q\right)f(x)=-\lambda\rho f(x),$$

sendo $p=1-x^2$, $q=0, \rho=1$ e $\lambda=n(n+1)$. De modo análogo, os polinômios associados de Legendre $L_n^k(x)$ são definidos usando a mesma equação diferencial, porém com $q=\dfrac{m^2}{1-x^2}$.

i) Verifique que $L_n(x)\equiv\dfrac{1}{2^n n!}\left(\dfrac{d}{dx}\right)^n(x^2-1)^n$ (esta equação é conhecida como *fórmula de Rodrigues*);

[Dica]: substituir a fórmula de Rodrigues na equação diferencial pode não ser o melhor caminho. Ao invés disso, determine as soluções para os primeiros n (n = 0, 1, 2...), e verifique que todos eles satisfazem a fórmula de Rodrigues.

ii) Use a relação

$$L_n^k(x) = \left(1-x^2\right)^{|k|/2} \left(\frac{d}{dx}\right)^{|k|} L_n(x), \quad |k| \leq n$$

e obtenha os polinômios associados de Legendre para n = 0, 1 e 2. Verifique que eles satisfazem a equação diferencial.