4300403 - Mecânica Quântica I

1º Semestre de 2011 (Noturno)

Lista 1B

Prof. Sylvio Canuto

1) Considere uma partícula de massa m submetida a um campo central $V(r) = -\alpha/r$ (problema de Kepler; veja Goldstein "*Classical Mechanics*").

i) Mostre que a sua trajetória é uma cônica $\frac{p}{r} = 1 + \in \cos\theta$ onde $p = M^2/m\alpha$ onde M é o momento angular e $\in$ é a excentricidade dada por $\in^2 = 1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}$ onde E é a energia.

ii) Verifique que a solução é um círculo para $E_0 = -\frac{m\alpha^2}{2M^2}$.

iii) Verifique que a solução é uma elipse para $E_0 < E < 0$.

2) Utilize a quantização de Wilson-Sommerfeld e obtenha os níveis de energia do oscilador harmônico unidimensional. Qual a energia do estado fundamental?

3) Utilizando a quantização de Wilson-Sommerfeld para o átomo de hidrogênio discuta os níveis de energia degenerados e as correspondentes trajetórias clássicas (círculo ou elipse) para o segundo estado excitado (n =3).

4) Demonstre a relação de Parseval $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(p)|^2 dp$, onde ψ(x) e φ(p) representam o pacote de onda na representação de coordenada e de momentum, respectivamente.

5) Use a equação de continuidade para mostrar que a normalização

$$I = \int P(\vec{r},t)d\vec{r} = \int \Psi^*(\vec{r},t)\Psi(\vec{r},t)d\vec{r}$$

se conserva, ou seja $\frac{\partial I}{\partial t} = 0$ para funções de quadrado integrável. A equação de continuidade é dada abaixo

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

e $\vec{J}$ é definido por

$$\vec{J} = \frac{\hbar}{2im}\left[\Psi^*\vec{\nabla}\Psi - \Psi\vec{\nabla}\Psi^*\right]$$

6) Dada uma função de onda devidamente normalizada φ(x), verifique que $\langle xp \rangle - \langle px \rangle = i\hbar$.

7) Uma partícula de massa *m* está confinada em um poço infinito unidimensional

$$V(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } |x| \le a; \\ \infty, \text{ se } |x| > a. \end{cases}$$

a) Mostre que o operador de paridade $Pf(x) = f(-x)$ comuta com o hamiltoniano e obtenha seus possíveis autovalores;
b) Obtenha os autovalores e autofunções do hamiltoniano;
c) Sendo $\Delta A = \left[\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2\right]$ mostre que no *n*-ésimo nível de energia

$$\Delta p \Delta x = \frac{\hbar}{2}\left[\frac{n^2\pi^2}{3} - 2\right]^{1/2} .$$

8) Considere uma partícula confinada em um poço finito de profundidade V_0 e largura a.

a) Quantos estados ligados existem para $\frac{3\pi}{2} < \left[\frac{mV_0 a^2}{2\hbar^2}\right]^{1/2} < 2\pi$?
b) Qual a paridade dos estados acima?
c) Se $V_0 \to \infty$ com *a* fixo, obtenha os níveis de energia e as correspondentes autofunções.

9) Uma partícula de massa *m* incide da esquerda para a direita e encontra a seguinte barreira

$$V(x) = \begin{cases} V_0, \; se\, 0 < x < a; \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

a) Obtenha o coeficiente de transmissão na região $x > a$;
b) Um próton com energia 10 eV incide sobre a barreira acima que tem altura V_0 = 15 eV e largura a = $2\,\text{Å}$. Calcule a probabilidade de transmissão através da barreira.
c) Qual a transmissão se a partícula nas condições acima for um elétron?