Mecânica Quântica I (4300403)

Prof. Sylvio Canuto

Lista de exercícios 2

1. Considere o estado fundamental do oscilador harmônico simples. Obtenha o valor esperado $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$, $\langle p \rangle$ e $\langle p^2 \rangle$. A coordenada x pode ser trocada pela coordenada adimensional $\xi = \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} x$ onde a função de onda é dada por

   $$\psi_n(\xi) = N_n H_n(\xi) e^{-\frac{1}{2}\xi^2}, \qquad N_n = (\sqrt{\pi} n! 2^n)^{-\frac{1}{2}}.$$

   Duas integrais úteis são dadas abaixo:

   $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad e \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}}.$$

   Obtenha $\langle V \rangle$, $\langle T \rangle$ e veja se satisfaz o teorema do Virial para o oscilador no estado estacionário.

2. Com os resultados do exercício 1, obtenha $\Delta x \Delta p$ e verifique se está de acordo com o princípio da incerteza.

3. A função de onda que descreve a partícula do oscilador quântico pode penetrar na região classicamente proibida. Esta região é limitada pelos pontos de retorno do oscilador clássico, onde $E = V$ (pois $T = 0$).

   a) Obtenha os pontos de retorno para o oscilador quântico e verifique que a amplitude da oscilação é quantizada.

   b) Considere o estado fundamental e primeiro estado excitado. Determine os pontos de retorno e esboçe as funções de onda em função da coordenada adimensional $\xi = \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} x$

4. Considere um oscilador harmônico tridimensional anisotrópico para o qual a frequência de oscilação vale ω nas direções x e y e tem valor $\frac{\omega}{2}$ na direção z.

   a) Quanto vale a energia do estado fundamental? E dos dois primeiros estados excitados?

   b) Há degenerescência em algum desses estados? Se sim, qual é o grau?

5. Encontre os autoestados para o potencial do semi-oscilador harmônico

$$V(x) = \begin{cases} \infty \quad se \quad x < 0; \\ \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \quad se \quad x > 0. \end{cases}$$

Sugestão: estude quais autoestados do oscilador harmônico usual satisfazem as condições de contorno extras do semi-oscilador harmônico.

6. Verifique que $\frac{d\langle p\rangle}{dt} = \langle -\frac{\partial V}{\partial x}\rangle$. Este resultado é conhecido como *Teorema de Ehrenfest*, ou seja, valores esperados obedecem leis clássicas. Repare na semelhança com a lei de Newton da mecânica clássica.

7. Obtenha a expressão do teorema do Virial para a mecânica quântica quando o potencial tem a seguinte forma

$$V(x) = \lambda x^n$$

Veja que para $n = 2$ temos o potencial de um oscilador, se $n = -1$ e considerarmos o caso tridimensional em $\mathbf{r}$, o potencial é coulombiano, etc. *Sugestão*: calcule $\frac{d}{dt}\langle xp\rangle$. Use

$$\frac{d\langle \hat{O}\rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar}\langle [\hat{H}, \hat{O}]\rangle.$$

8. Mostre explicitamente que o operador p é hermitiano.

9. Mostre que se os operadores A e B forem hermitianos, então $i[A, B]$ também é hermitiano.

10. Os operadores a_- e a_+ são dados pelas expressões

$$a_- = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(m\omega x + ip) \qquad a_+ = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(m\omega x - ip)$$

a) Mostre que o comutador entre estes dois operadores é $[a_-, a_+] = 1$.
b) Encontre uma expressão para o operador H do oscilador em função dos operadores a_- e a_+.
c) Utilize H encontrado no item b e verifique a relação de comutação $[H, a_-] = -\hbar\omega a_-$.
d) Supondo que ψ satisfaz $H\psi = E\psi$, calcule os autovalores de H para os autoestados $a_-\psi$ e $a_-^2\psi$, em função de E, $\hbar\omega$. O que acontece com os autovalores do hamiltoniano?

11. Usando a equação $a_- \psi_0 = 0$ e a forma explícita de a_- em função de x e $\frac{d}{dx}$, mais a condição de normalização, construa a função de onda $\psi_0(x)$.

12. A partir de $\psi_0(x)$:

    a) Construa o estado $\psi_1 = \frac{a^+}{\sqrt{1}} \psi_0$ e o estado $\psi_2 = \frac{(a^+)^2}{\sqrt{2}} \psi_0$;

    b) Desenhe ψ_0, ψ_1, ψ_2;

    c) Mostre a ortogonalidade desses estados por integração explícita. *Sugestão*: observe que ψ_0 e ψ_2 são pares e ψ_1 é ímpar.